

# 颗粒物质(上)\*

陆坤权<sup>1 †</sup> 刘寄星<sup>1 2</sup>

(1 中国科学院物理研究所软物质实验室 北京 100080)

(2 中国科学院理论物理研究所 北京 100080)

**摘要** 颗粒物质是地球上存在最多、最为人们所熟悉的物质类型之一。大量颗粒组成的离散态物质体系具有特别的性质和运动规律。颗粒物质表现出许多不同于固、液、气物质的奇特现象和独特的运动规律。由于对颗粒物质运动规律的理解具有重要科学意义和应用背景,近十年来颗粒物质研究逐步成为物理学研究中的一个活跃领域。文章综述了颗粒物质的一些主要特性,如颗粒物质的静态性质、振动行为、流动特性等,其中也包括文章作者的一些新近研究结果。限于篇幅,文章分为上、下两部分发表。第一部分在对颗粒物质作一般介绍后讨论颗粒物质的静态特性,第二部分则主要讨论颗粒物质振动时的行为和流动性质。

**关键词** 颗粒物质 粮仓效应 挤压膨胀 力链 颗粒分离 振动班图 颗粒流 堵塞

## Static and dynamic properties of granular matter( I )

LU Kun-Quan<sup>1 †</sup> LIU Ji-Xing<sup>1 2</sup>

(1 Laboratory of Soft Matter, Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

(2 Institute of Theoretical Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**Abstract** Granular matter is the most familiar form of matter in existence on the Earth. A system consisting of a great amount of grains behaves quite differently from the well – investigated states of matter such as solids, fluids and gases. In spite of the continuous efforts of many scientists since the 19th century, understanding the laws governing granular matter remains a challenge for physicists. This article reviews the static and dynamic properties of granular matter.

**Key words** granular matter, silo effect, reynolds dilation, force chain, segregation, vibration pattern, granular flow, blockage

## 1 引言

颗粒物质在自然界、日常生活及生产和技术中普遍存在。例如:自然界中沙石、土壤、浮冰、积雪等;日常生活中的粮食、糖、盐等;生产和技术中的煤炭、矿石、建材以及不少药品、化工品也为颗粒物质。很多其他离散态物质体系,例如散装货物输送、地球板块运动及公路上车辆的流动等也常作为颗粒体系来处理。可以说,颗粒物质是地球上存在最多、最为人们所熟悉的物质类型之一。

我们这里所讨论的颗粒物质一般指由尺寸  $d > 1\mu\text{m}$  的颗粒组成的宏观体系。当颗粒尺度小于  $1\mu\text{m}$

时,热运动即布朗运动会有重要影响。若颗粒尺度更小,微观相互作用则起主要作用。因此,这些小尺度的颗粒的运动规律与宏观颗粒不同。对于宏观颗粒,经典力学可以给出单个颗粒运动状态的精确解。然而,大量颗粒组成的体系具有特别的性质和运动规律。颗粒物质静止时类似于固体,流动时则类似于液体或气体。向地板上撒一筒沙子,沙粒并不会像水那样平铺在地板上,处于势能最小状态,而是根据抛洒方式及过程的不同形成各种不同的堆积形态,即有

\* 国家自然科学基金(批准号 10274058)资助项目

2004-01-17 收到初稿 2004-03-23 修回

† 通讯联系人。E-mail: lukq@aphy.iphy.ac.cn

许多亚稳态. 若将支撑一个沙堆的地板慢慢倾斜, 沙子会发生流动, 然而这种流动只发生在沙堆的表面几层. 如果在沙堆上继续添加沙粒或施加扰动, 超过某一临界状态时, 就会引起沙堆崩塌. 拿一块石子扔向沙堆, 石子不会像撞在固体表面那样反弹, 而是将其动能完全耗散在沙堆中. 向一个容器内填充颗粒, 颗粒对容器底部施加的压强先随颗粒填充高度增加而变大. 到一定高度后, 压强会趋于某一饱和值而不再增大, 称之为“粮仓效应”. 颗粒有成拱的特性, 颗粒物质中的力通过不均匀力链传递, 不像固体和液体中的应力会均匀分布. 振动会引起不同大小和质量颗粒的分离, 也可在颗粒体系表面形成各种斑图. 颗粒流动中的稀疏流、密集流和堵塞等行为不同于一般流体运动. 颗粒物质的状态, 有时很稳定, 而在有些情况下, 会因极小的作用而改变, 如发生崩塌. 所有这些表明, 颗粒物质是不同于固体、液体和气体的一种特殊的物质形态, 它具有丰富的现象和不同于固、液、气物质的独特的运动规律.

目前对颗粒物质的运动规律及其物理本质的认识还很不深入, 即使对静态颗粒物质, 也不能给出表述其状态的合适方程. 因此, 我们还只能对颗粒物质的基本特征给予一般性描述. 颗粒物质中的相互作用不同于原子或分子之间的作用, 颗粒之间作用主要是摩擦力以及碰撞, 对其组成的单个颗粒本身的物理性质不敏感. 若用硬球来表示颗粒, 任意堆积的颗粒结构呈无序状态. 由于我们讨论的颗粒尺度  $d$  较大, 其势能  $mgd$  比  $kT$  大  $10^{12}$  倍以上, 因而温度所引起的作用在颗粒体系描述中可忽略不计. 颗粒体系为能量耗散体系, 外界作用或颗粒运动能量会通过与其他颗粒的摩擦和碰撞而耗散. 外加转动与振动会使容器中不同大小的颗粒分离开来, 而不是像一般热力学系统那样, 加速系统趋于混合均匀的平衡状态. 颗粒粒子相当于处在  $kT=0$  的状态, 没有外力作用时, 系统的结构形态不会按热平衡规律而改变. 因此, 颗粒物质的行为一般不能用通常解释固体和流体的理论给予解答.

利用颗粒物质的特性及开展对颗粒物质的研究已有很长的历史. 颗粒物质的一些独特性质早已为人们发现. 沙漏作为计时器比水漏更简便和准确, 就是利用了沙粒从孔中流出的流速不像水流那样随压强改变的特性. 通过簸箕的颠、摇、晃把沙粒、谷皮等杂质从谷物中分离出来, 则是利用外加振动实现颗粒分离的常见例子. 这一现象的发现相当久远, 我国至少在南朝(公元412—589年)就有“簸之扬之, 糠

秕在前, 洮之汰之, 砂砾在后.”的说法了(出自《世说新语》, 南朝·宋). 文艺复兴之后的几个世纪以来, 不少著名科学家研究过颗粒物质. 库伦(Chales de Coulomb, 1736—1806)最早提出<sup>[1]</sup>沙堆倾斜角度与摩擦系数关系, 他的有关固体摩擦问题的表述现在还被反复提及. 法拉第(Michael Faraday, 1791—1867)1831年发现振动使颗粒形成对流而堆积起来<sup>[2]</sup>. 雷诺(Osborne Reynolds, 1842—1912)于1885年指出<sup>[3]</sup>, 如果颗粒紧密堆积在一个弹性袋中, 任何外加作用都会使颗粒所占体积增大, 称之为雷诺挤压膨胀原理. 1884年, 英国科学家 Roberts I 首先注意到前面提到的粮仓效应后, 德国工程师 Janssen H 在1895年提出一个模型<sup>[4]</sup>来解释粮仓效应, 这一模型直到现在已被人们普遍接受, 后面我们将简述这一模型.

尽管工业、工程及技术界一直以应用为目标对颗粒物质的生产、加工、输送等进行了长时间的研究, 但物理学家对其研究兴趣的兴起还是近十多年的事. 颗粒物质不但广泛存在, 而且与工业技术和人们生活密切相关. 全世界谷物及其他各种颗粒物的年产量数以亿吨计. 其中包括煤、矿石、水泥建材、砂子与碎石等低附加值材料, 以及高附加值的食品、工业原料、药品和化妆品等. 这些物质的生产、运输、加工及储存, 每年约消耗地球上10%的能量. 对颗粒物质的深入认识将会对全球工业与经济的发展有极大助益. 为防治泥石流、雪崩、浮冰、滑坡、沙漠化、地震等自然灾害, 也必须了解颗粒物质的运动规律. 公路交通流问题也与颗粒流规律密切相关. 这些是颗粒物质本身的重要性. 另一方面, 颗粒物质具有不同于其他物质的许多奇特性质, 其基本规律远没有被认识清楚. 因此吸引了物理学家的兴趣, 成为活跃的研究领域.

近年来, 虽然开展了关于颗粒物质的多方面的实验和模拟计算, 获得了许多有意义的结果, 但对其运动规律研究的认识还很肤浅, 描述颗粒物质的基本理论尚未建立, 有关颗粒物质的一些最基本问题还在困扰人们.

关于对颗粒物质的认识, 著名理论物理学家 de Gennes 和 Kadanoff 作了评述. de Gennes 认为<sup>[5]</sup>, 这一领域几乎每一件事都尚待理解, 目前对其认识程度只相当于20世纪30年代固体物理的水平. Kadanoff 则表示<sup>[6]</sup>, 不能用普通流体力学方程描述颗粒物质, 它的丰富奇特行为没有得到很好理解.

颗粒物质是一类复杂体系, 研究颗粒物质, 不仅

有重要应用背景,对这类物质状态运动规律的深入认识也将会促进物理学的新发展. 本文将对颗粒物质的一些主要特性,如颗粒物质的静态性质、振动行为、流动特性等作简要概述. 其中也包括一些我们的新近研究结果. 对颗粒物质研究的更深入了解,可参阅文献 [7].

## 2 颗粒物质的静态性质

### 2.1 颗粒的堆积密度和挤压膨胀

我们知道,液体与固体不同的主要特征之一是,任何切变应力都会引起液体的流动. 由于重力及颗粒之间的摩擦力能使一堆颗粒保持某种形态,可承受一定的应力而不发生屈服和运动. 静止颗粒堆的这种性质与固体很相似. 然而,在某些情况下,一个很小的力就能使颗粒堆产生流动,甚至崩塌,这又类似于液体. 对于固体和液体,当温度和压力确定时,其密度是确定的. 颗粒堆中的颗粒无序分布,其堆积密度(或称体积分数)则不确定,与堆积方式和历史有关. 尺寸相近的颗粒,其堆积密度约在 0.56—0.64 的范围内. 若颗粒的大小不同,堆积密度会更大. 相同尺寸球形颗粒物质的无序堆积密度低于有序面心(或六方)密堆积时的堆积密度 0.74,而高于简单立方堆积密度 0.52. 二维颗粒堆积的密度比三维的堆积密度高.

对堆积的颗粒施加一作用,如敲击存放颗粒的容器时,颗粒密度会发生改变,是变大还是变小,取决于颗粒初始堆积密度. 若颗粒原来堆积得很密,则敲击使堆积密度降低,即体积膨胀,称之为雷诺膨胀<sup>[3]</sup>,这是颗粒物质的独特行为;若颗粒初始堆积密度很小,则敲击使密度增大.

用图 1(a)表示的二维颗粒模型来说明这一现象. 设颗粒的半径为  $R$ ,两颗粒竖直中心距离为  $h_v$ ,水平中心距离为  $h_l$ ,很容易求出 4 个颗粒中间间隙的面积  $S$ . 当在上部挤压颗粒时,则面积  $S$  随  $h_l$  从小到大的变化如图 1(b)所示. 可以看出,面积  $S$  存在一个最大值. 当颗粒堆积密度很大(即面积  $S$  小)时,挤压可使面积  $S$  增大,即使得颗粒堆积密度降低. 若颗粒堆积密度低到一定程度,则外加作用可造成颗粒密度增大. 图 1(b)表示出这两个不同区域. 这一模型能清楚地说明颗粒密度在外界作用下发生变化的道理. 在日常生活中经常可观察到这些现象. 在海边湿沙滩上走路,我们观察到脚印周围的沙子变干,就是因为挤压使我们脚下的沙子变松(体积膨胀),周围沙子中的水分流入的缘故. 而在一个容

器中装粮食,摇晃几下容器,就可装更多粮食,这就是外加作用使颗粒堆积密度增大的例子.

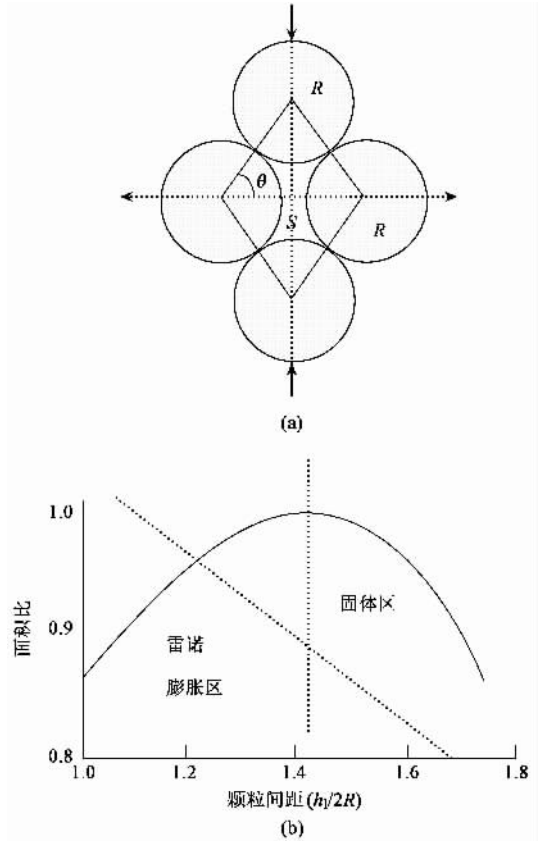


图 1 颗粒的加压膨胀特性<sup>[7]</sup>

颗粒的堆积密度是影响颗粒物质性质的重要物理量,不仅颗粒静态性质对堆积密度很敏感,流动和振动的行为均与颗粒堆积密度有关. 例如,任何颗粒流动的发生都是以局部颗粒堆积密度的降低(体积膨胀)为条件的.

### 2.2 沙堆的静止角和颗粒中的摩擦力

在地上堆一个沙堆时,缓慢地从上方添加颗粒,沙堆逐渐增高,其倾角  $\theta$  会越来越大,如图 2 所示. 当超过某一角度  $\theta_m$  时,崩塌开始. 沙堆的倾角迅速减小到  $\theta_r$  时,崩塌停止. 这时的倾角为  $\theta_r$ ,  $\theta_r < \theta_m$ .  $\theta_r$  称为静止角,  $\theta_m$  称为崩塌角. 通过测量,人们发现静止角和崩塌角之差  $\sigma = \theta_m - \theta_r$  约为  $2^\circ$ . 研究还表明,只有当沙堆足够大时,静止角  $\theta_r$  和崩塌角  $\theta_m$  才有分别. Duran 估算<sup>[7]</sup>,组成沙堆的颗粒不低于 8000 个时才可区分  $\theta_r$  和  $\theta_m$ . 显然  $\theta_r$  和  $\theta_m$  的存在与颗粒间的摩擦系数有关. 库仑早就注意到这个问题<sup>[1]</sup>. 假定坡面上的剪切应力为  $\tau$ ,正应力为  $\sigma_n$ ,他发现二者有如下关系式:

$$\tau = \mu_s \sigma_n = \tan \theta_m \sigma_n, \quad (1)$$

其中  $\mu_i$  是颗粒的摩擦系数. 一般物质的  $\theta_m$  为  $35^\circ$  左右. 最近的研究表明, 这一角度还与沙粒的堆积密度有关. 对于尺寸单一的球形颗粒, 静止角还与颗粒的尺寸有关. 沙堆在静止角附近的崩塌是一个重要现象, Bak P 等人<sup>[8]</sup>由沙堆的崩塌提出了自组织临界性 (self-organized criticality, SOC) 概念, 它可提供理解自然界普遍存在的自组织行为规律的依据. 尽管学术界对其具体例证尚有争议, 但基本观点已被广泛承认. 关于此问题, 已有专门著作出版<sup>[9]</sup>, 这里不再详述.

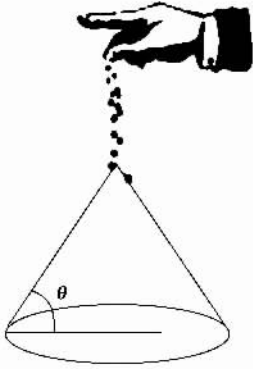


图2 沙堆的静止角<sup>[7]</sup>

颗粒物质的许多特征都与其摩擦性质有关, 颗粒间的摩擦是一个复杂的问题. 实验表明, 颗粒物质间的剪切静摩擦系数约在 0.7 左右. Hovath 的实验表明<sup>[10]</sup>, 颗粒物质中的摩擦力与颗粒的堆积密度有关. 他把一根圆棒插入颗粒中, 通过测量拉出圆棒所需的力来测量颗粒的摩擦力, 发现摩擦力随堆积密度  $C$  呈指数增长:  $F(C) = ke^{C/C^*}$ . 胡林等人最近用类似的实验<sup>[11]</sup>, 通过提拉颗粒中的圆棒, 测量了颗粒填充高度及棒径对摩擦力的影响. 结果表明, 圆棒在颗粒中受到的摩擦力  $F$  随其伸入颗粒深度  $h$  和棒径  $D$  而增大. 用连续介质模型推导所得的摩擦力与深度  $h$  和棒径  $D$  的关系, 与测量结果基本一致. 当  $h$  很小时,  $F$  近似与  $Dh^2$  成正比; 而当  $h$  大时,  $F$  近似与  $Dh$  成正比. 这说明, 从颗粒 (如沙) 中拔一根棒所需的力的大小与它所埋入的深度及棒的直径有关. 当棒在颗粒中插得很深时, 棒所受到的静摩擦力与接触面积成正比. 这也表明, 用此方法测量摩擦力, 须注意颗粒深度的影响.

### 2.3 粮仓效应和 Janssen 连续介质模型

如果在圆筒仓中装入高度为  $h$  的颗粒物质, 问仓底所受压强有多大. 我们自然会联想到液体的情况. 对于液体, 筒底所受的压强为  $\rho gh$ .  $\rho$  为密度,  $g$

为重力加速度. 然而, 早就有实验发现, 在颗粒仓中, 仓底所受压强与  $h$  的关系和液体情况很不相同. 当颗粒高度  $h$  较小时, 仓底所受压强正比于  $h$ , 类似液体. 如果继续添加颗粒, 底部压强达到一定值后不再随颗粒高度而增加, 这被称为粮仓效应. 表面看起来颗粒物的部分重量似乎丢失了, 其实这是由于颗粒与筒壁间存在着摩擦力, 筒壁承担了部分颗粒重量. 1895 年, Janssen 最早用连续介质模型对这种现象给出了理论解释<sup>[4]</sup>, 这一模型目前还被认可<sup>[5]</sup>. 下面简要介绍计算方法.

假定在圆筒中颗粒横向应力强度  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  正比于纵向应力强度  $\sigma_{zz}$ , 即  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = K\sigma_{zz} = -Kp(z)$ ,  $K$  称为压力转向系数, 一般约为 30%. 在  $z$  处, 压强  $p(z) = -\sigma_{zz}$ . 如图 3 所示, 在面积为  $\pi R^2$ 、厚度为  $dz$  的体元上, 力平衡条件为

$$-\sigma g dz + \partial p = \frac{2}{R} \partial z \sigma_{rz} \Big|_{r=R}, \quad (1)$$

其中  $\sigma_{rz}$  为壁所承受的应力,  $r$  为径向坐标. 假定颗粒与壁摩擦力每处都达到了最大值, 有  $\sigma_{rz} = -\mu_f \sigma_{rr} = -\mu_f K p$ ,  $\mu_f$  为颗粒与壁摩擦系数. 由以上几个表示式, 可得方程

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{2\mu_f}{R} K p = \rho g. \quad (2)$$

由此方程解出  $z$  处的压强为

$$p(z) = p_\infty [1 - \exp(-z/\lambda)], \quad (3)$$

其中  $\lambda = \frac{R}{2\mu_f K}$ , 定义为特征高度.  $p_\infty = \rho g \lambda$  为颗粒高度远大于特征高度时的压强饱和值. 由 (3) 式可知, 当  $z < \lambda$  时,  $p \approx \rho g z$ , 即颗粒堆积较浅时, 压强正比于高度, 类似于液体情况. 而当  $z > \lambda$  时, 即颗粒高度大于特征值  $\lambda$  时,  $p \rightarrow p_\infty$ , 底面压强趋于饱和. 由  $\lambda = \frac{R}{2\mu_f K}$  可估计出特征长度  $\lambda$  约为  $R$  的 3—4 倍, 即颗粒高度达到圆筒直径两倍左右时, 再增加颗粒高度也不会使底面压强继续增大. 进行粮仓效应的实验测量时, 如何取得比较可靠的数据是值得注意的问题. 装料过程、颗粒堆积分数和测量的方法等均会影响测量结果. Vanel<sup>[12]</sup>等人 1999 年的实验值与 Janssen 公式计算的结果接近. 图 4 给出了他们的实验值与理论结果的比较, 实验时颗粒体积分数为 0.585. 最近又有一些研究粮仓效应的理论和实验工作, 得到大致相同的结果.

## 4 颗粒中力的分布

首先从一个有趣的问题开始讨论. 在地面上将

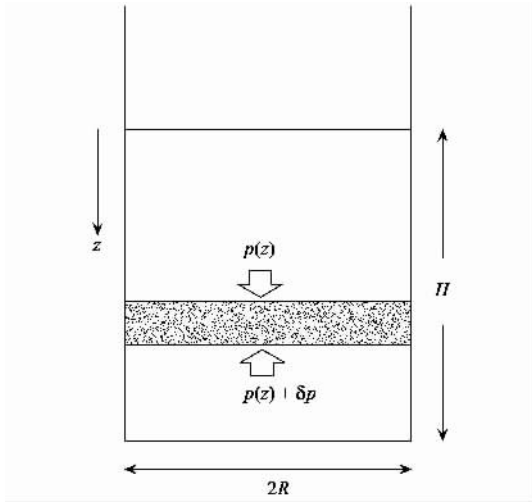


图3 圆筒中颗粒压强的计算示意图

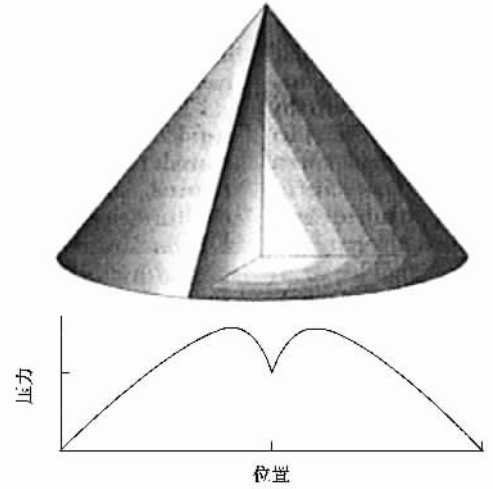


图5 沙堆底部压力随位置的变化“中心凹陷”的示意图

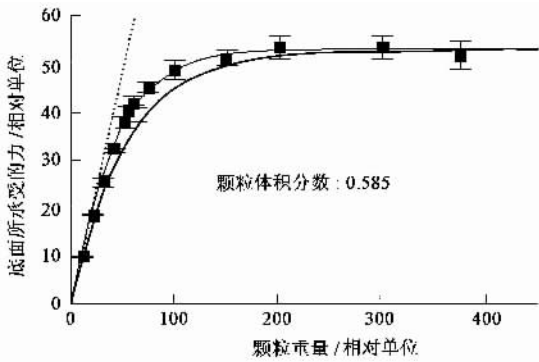


图4 圆筒中底面压力随颗粒重量变化的关系

一堆苹果以锥形堆放,问那一个苹果受到的压力最大而最容易被压坏。直观的看法是,底部正中央的那个苹果因其上方堆放苹果最多,所以受到的压力最大,因而最容易被压坏。然而,事实并非如此。实验表明,那个苹果所受的压强比其周围同一层的苹果要小。因为它恰好处于该层压强分布的一个局域的极小值处,被称为压力凹陷<sup>[13,14]</sup>如图5所示<sup>[15]</sup>。

Vanel 等人做了很有趣的实验<sup>[16]</sup>,研究锥形和楔形两种不同形状沙堆的底部压力分布。不论那种堆积形状的中心都存在压力凹陷,其中锥形沙堆的中心压力凹陷效应要比楔形沙堆明显。前者中心处的压力值比最大值减低了约50%,而后者只降低大约15%。用不同方法制备的沙堆,以及不同高度和形状的沙堆,其结果都不相同,表明这种压力凹陷与沙堆形成的历史密切相关。

Edwards 对这种压力凹陷给出了一种简单的解释<sup>[17]</sup>。他认为这是由于沙堆内部颗粒的成拱结构把重量分散到沙堆的外围部分所引起的。但 Boun-

chaud 等指出<sup>[18,19]</sup>,这种简单的 Edwards 模型在力学上是不稳定的,从而提出了基于固定主轴(fixed principal axis, FPA)假说的连续近似模型。该模型要求应力张量的主轴总是指向同一方向,并且从沙堆生成时,颗粒就“记住”这一特征。这个模型的计算结果如图6所示。尽管这个模型看起来与实验结果符合得很好,但还是有人对此提出异议。以后,又有对此问题研究的若干结果发表。到目前为止,已有多数解释颗粒物质中力分布的模型提出,尚未获得统一的认识。

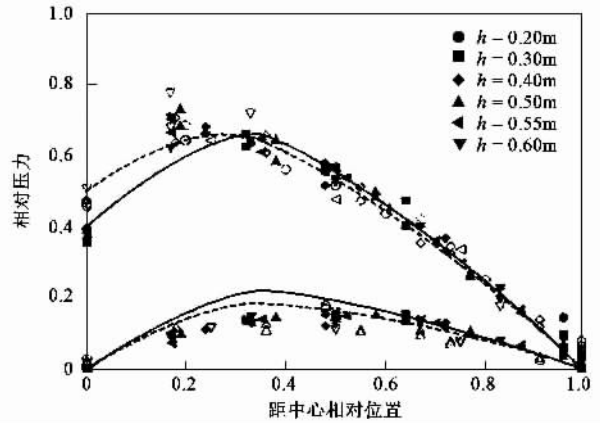


图6 沙堆底部压力随轴向位置的变化(h为堆积高度,曲线为计算值,符号为实验值)

从上面的例子可看出,颗粒物质中力如何分布,施加的作用力又如何传播,这是个复杂问题。颗粒通过接触而发生互相作用,接触的摩擦力及互相支撑的成拱效应决定了力的分布。我们知道,当一块物体放在斜面上时,即使斜面的倾斜角在一定的范围改变,或施加的外力小于某一定值时,物体仍可不发生

移动, 这表明物体所受到的摩擦力不是定值. 因此, 即使对于两个相同的沙堆, 其中处于相同位置的颗粒间的摩擦力亦可为不同值, 与颗粒放置和接触的历史有关. 这种摩擦力的不确定性给研究颗粒体系中的力分布带来了困难. 不同于固体中原子之间有吸引和排斥作用而平衡, 颗粒之间只有硬球排斥互相作用. 在重力场中, 颗粒互相接触和支撑而集合在一起. 实验发现, 颗粒中力的分布是不均匀的, 通过力链形成力的网络, 这个网络也不是均匀的. 力链或拱上颗粒的应力很强, 而其旁边的颗粒受力可很弱, 甚至不受力. 因此, 处于力链上颗粒的任何局部的或微小的位置变动都可能引起颗粒体系力分布的很大变化, 造成崩塌. 例如, 在自然界, 有时一些小的扰动就会引起雪崩和塌方的发生. 另一方面, 不处于力链(或拱)上的颗粒的变动, 则一般不会对整个颗粒体系产生什么重要的影响. 石块建成的拱形建筑下方可有很大空间就是实例.

定量测量颗粒中力的分布不是一件容易的事. 有人用透明颗粒的应力双折射效应观察颗粒中的力链. 将一些玻璃珠放在由甘油和水混合而成的匹配液中, 在上面用活塞向下压, 玻璃折射率的变化反映出颗粒的受力情况. 图 7 表示三维颗粒体系中力链的照片<sup>[20]</sup>.

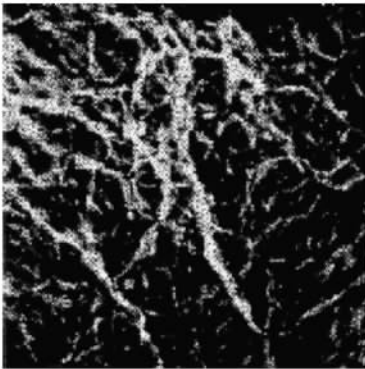


图 7 应力双折射效应观察的颗粒中力链

另一种方法可以测量颗粒中力的分布情况: 把一层炭纸放在颗粒容器壁或底部, 颗粒在炭纸上会留下痕迹, 事先将压痕与力的关系进行标定, 根据压痕的大小和颜色深浅可知颗粒作用力的大小, 从而得到颗粒中力的分布. Mueth 等人将颗粒放置于圆筒中<sup>[21]</sup>, 在顶部施加压力, 测量容器器壁和上下底面颗粒受力分布. 把各处测得的力  $f_m$  用平均值归一为  $f = f_m / f_{mean}$ , 获得力分布  $p(f)$ , 示于图 8. 结果表明, 容器上、下底和器壁处的颗粒受力分布没有差

别. 高于力平均值的几率随力的增大按指数规律减小, 而低于平均值的力的几率分布大致不变. 满足拟合公式  $p(f) = a(1 - be^{-f^2})e^{-cf}$ . 其中拟合参数  $a = 3$ ,  $b = 0.75$ ,  $c = 1.5$ . 此外, 还有类似的其他实验测量, 结果不太一致, 但基本规律差不多.

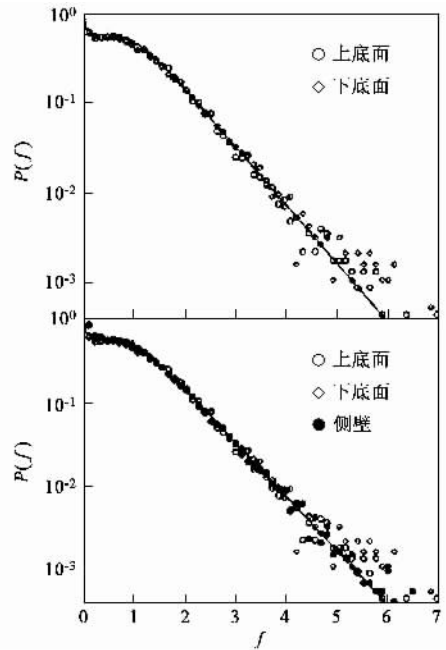


图 8 横轴为压力比  $f = f_m / f_{mean}$ , 纵轴为几率(上图为上下底面的压力分布, 下图为侧壁的压力分布)

为解释压力分布规律, Coppersmith 等人提出  $q$  模型<sup>[22]</sup>.  $q$  模型是一个简单的标量模型, 但给出了很好的结果, 得到在力较大时  $p(f) \propto e^{-cf}$ , 与实验观测基本一致. 在  $q$  模型提出后, 人们在此基础上提出各种修正, 使之更接近实际情况. 同时还有一些模拟计算结果形象地说明了力在沙堆中的传播是不均匀的, 形成力链网络, 如图 9 所示<sup>[23]</sup>.

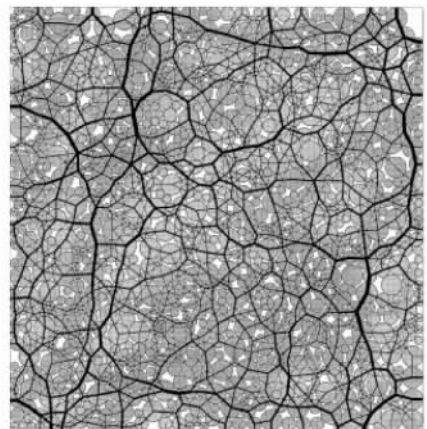


图 9 沙堆中力链分布的模拟结果

