

从软物质到拓扑力学超材料

李锋[†] 汤正 马方垣 周迪^{††}

(北京理工大学物理学院 先进光电量子结构设计与测量教育部重点实验室 北京 100081)

2024-09-06 收到

[†] email: phlifeng@bit.edu.cn

^{††} email: dizhou@bit.edu.cn

DOI: 10.7693/wl20241002

CSTR: 32040.14.wl20241002

From soft matter to topological mechanical metamaterials

LI Feng[†] TANG Zheng MA Fang-Yuan ZHOU Di^{††}

(Key Lab of Advanced Optoelectronic Quantum Architecture and Measurement (MOE),

School of Physics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

摘要 软物质是物理学、化学和生物学的重要研究对象。在软物质中，等静定系统恰好处在力学稳定和非稳定的边缘，展现出丰富的物理性质，普遍存在于自然界和工程领域，如颗粒物质、细胞骨架纤维和软体机器人等。等静定系统展现出独特的力学性能极化现象，一侧因力学软模而展现出柔软性，另一侧则在自应力作用下异常坚硬，这种奇特的表面性质具有拓扑稳定性，对材料内部缺陷及外部破坏不敏感，为力学材料的创新设计提供了新视角，催生了“软物质拓扑力学”这一前沿领域。文章基于软物质的基本概念，融合拓扑能带理论，聚焦于力学超材料，讨论了软物质拓扑力学的发展历程及最新研究进展。

关键词 软物质，力学软模，拓扑，力学超材料

Abstract Soft matter is a crucial area of research in physics, chemistry, and biology. Among these systems, isostatic systems are particularly intriguing as they lie on the verge of mechanical stability and instability, exhibiting a variety of fascinating properties. These systems are ubiquitous in nature and engineering, such as in granular materials, cytoskeletal fibers, and soft robotic metamaterials. Isostatic systems display highly polarized surface mechanics: the surface hosting mechanical floppy modes exhibits softness, while the opposite boundary, hosting states of self-stress, is as rigid as the inner body. Furthermore, this polarized surface elasticity is insensitive to disorder and randomness, demonstrating topological robustness. This gives rise to the burgeoning field of “topological mechanics”. By integrating the fundamental concepts of soft matter, topological band theory, and mechanical metamaterials, this paper reviews the development and latest progress in topological mechanics.

Keywords soft matter, floppy modes, topology, mechanical metamaterials

1 引言

软物质是一类结构随外界应力作用发生显著变化的物质，广泛分布于自然界与工业生产之中。日常生活中，如肥皂泡沫的胶体成分^[1]、沙堆中

的颗粒结构^[2]、计算机屏幕中的液晶显示层^[3]，乃至生物体中的某些软组织^[4, 5]，其基础构成均属于软物质范畴。此外，高分子聚合物^[6]制成的塑料及纤维纺织品如棉花、丝绸等，也是常见的软物质材料。当前，软物质研究已成为现代科学的前

沿阵地，其重要性不仅体现在对颗粒物堵塞现象^[7]、材料降温过程中的玻璃态转变^[8]以及生物伤口愈合机制^[9]等科学问题的深入理解上，还广泛应用于多个领域，吸引了多学科研究者的密切关注。深入探究软物质的微观机制，对于智能材料的设计与开发同样具有深远的意义。值得注意的是，自然界中的软物质往往展现出比人工材料更高的稳定性，从而对外界干扰具有更强的抵抗力，这使得由软物质构成的生物系统能够表现出卓越的自适应能力，如上皮组织的刚度调节^[10]和纤维材料的力学强化^[11]。受此启发，人工设计的软物质超材料可望展现出对极端环境变化的优异适应性^[12]。

在软物质领域，存在一类尤为引人注目的系统，人们称之为“等静定系统(isostatic systems)”。这类系统广泛存在于自然界的软物质中，比如沙堆内的颗粒、生物上皮组织的细胞排列，以及包括石英玻璃在内的网络玻璃结构^[13]等。这类系统的核心特征在于其组成单元的自由度与所受约束数目相等，使得系统处于一种微妙的力学平衡状态，既非绝对稳定也非完全不稳定。特别有趣的是，等静定系统中常常并存着两种截然不同的力学特性：力学软模与自应力。力学软模表现为零刚度，赋予系统极高的柔韧性和极低的能量损耗；而自应力则展现出极高的刚度，使开放边界的强度可与材料内部的刚度相媲美。这两种看似对立

的力学行为在等静定系统中共存，赋予了这些结构独特的物理性质。正是这些独特的力学特性，使得等静定结构在面对内部弯曲或整体形变时，能够避免连锁的力学失稳，从而保持结构的完整性和稳定性。这一特性在诸如网络玻璃和某些准晶化学结构中得到体现，使它们展现出优异的抗腐蚀性能，在需要高化学稳定性的领域得到了广泛应用^[14]。

近年来，随着对软物质研究的不断深入，研究人员发现在等静定软物质系统中，力学软模与自应力之间存在着一种称为“手征对偶(chiral symmetry)”的关系，这是一种对称性联系。手征对称性，这一源自高能物理与拓扑超导领域的关键概念^[15]，揭示了基本粒子在左右对称变换下的物理等价性，为超导体表面电子态赋予了独特的拓扑稳定性，对电子运输^[16]等技术应用具有深远影响。尽管软物质与拓扑超导体看似分属不同领域，但它们共同展现的手征对称性却揭示了两者间潜在的深刻联系。美国科学院院士 Charles Kane 与 Tom Lubensky 巧妙地将这两个领域结合，提出了“软物质拓朴力学”的新理论框架。他们发现，在等静定软物质中，力学软模与自应力模式类似于超导体的表面拓扑电子态，成对出现在力学材料的平行开放边界上。具体而言，上表面被力学软模覆盖，展现出高度的柔软性，而下表面则承载自应力，表现为显著的硬度，两者间形成了鲜明的软硬对比，其刚度差异可达一千倍以上，展现了高度极化的表面力学特性。

尤为关键的是，这些力学软模与自应力同样展现出拓扑稳定性，这种稳定性正是基于它们之间的手征对称性。这一特性意味着，即使材料内部存在缺陷或外部环境发生变化，力学软模也能在软物质表面保持稳定，维持其力学性质的恒定性。更进一步，当等静定力学软材料被截断时，每一段材料仍能独立保持“上软下硬”的力学特性。人们把具有这种独特性质的材料，称之为“软物质拓朴力学超材料”。

这些具有拓扑稳定性的力学行为不仅促进了“软物质拓朴力学”这一新兴学科的发展，也为力

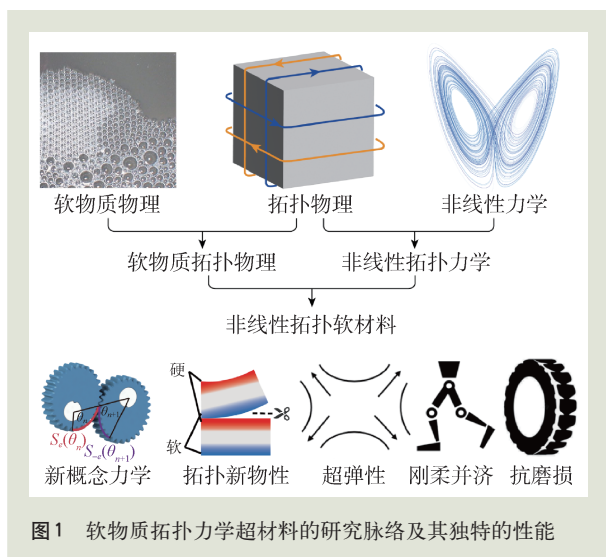


图1 软物质拓朴力学超材料的研究脉络及其独特的性能

学材料的创新设计开辟了新道路。从结合刚性与柔性的可穿戴外骨骼，到适应各种地形的免充气拓扑轮胎，再到刚度可灵活调节的飞行器起落架，一系列融合了柔性吸能、高强度与自适应性的新型材料应运而生，彰显出“软物质拓扑力学材料”的广泛应用前景。

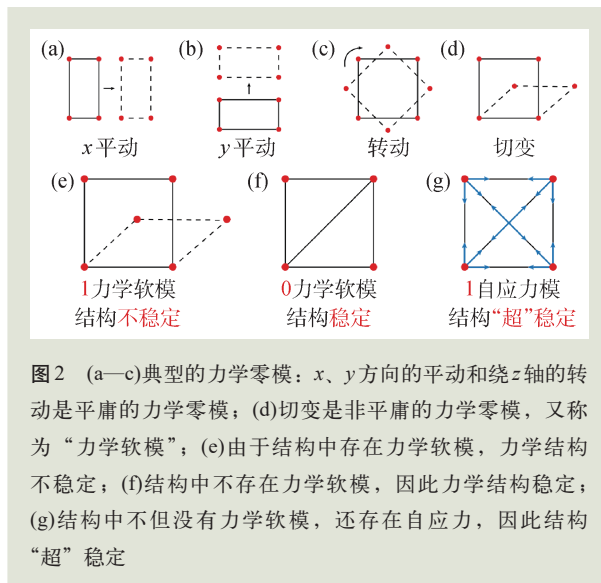
软物质拓扑材料是一个正逐步发展的交叉学科领域，它试图通过整合软物质物理、拓扑物理以及非线性力学的基本原理，来探究软等静定结构所展现出的特殊力学性能。本文将简要介绍该领域所依赖的软物质物理基本概念，概述拓扑力学的理论基础，并讨论拓扑超材料在特定应用场景下的可能性。同时，我们也将对目前软物质体系中观察到的一些拓扑力学性质进行初步探讨，以期对相关研究者提供一些参考和启示。我们设计了图1，对软物质拓扑力学这一新兴领域的发展脉络进行了总结。

2 软物质的基本物理概念

2.1 力学软模和自应力

从工程力学到软物质科学领域，理解复杂结构的力学性能是非常重要的。比如在日常生活中，我们既希望建筑物和桥梁能展现出超常的力学稳定性，也希望弹性材料具有灵活可调的力学柔软性。在这些探索中，由简单的弹簧和质点所组成的弹性网络模型(elastic network)是基础而强有力的研究工具。这个模型虽然简单，却具有非常重要的科学意义和应用意义。它帮助我们更好地理解颗粒物质阻塞问题中的临界指数、玻璃态的转变过程，以及生物细胞中的固液状态变化等复杂现象。同时，弹性网络还能描绘折纸问题的力学稳定性，在航空航天领域有重要应用。

在弹性网络中，有两个核心概念：力学软模和自应力。为了深入理解力学软模，我们首先需要借助力学零模(mechanical zero mode)这一概念作为桥梁。如图2所示，当弹性网络中的一组质点运动不产生任何弹性势能时，这样的运动模式被定义为力学零模，力学零模在日常生活中随处



可见。以二维空间中的四质点、四弹簧矩形框架为例，它自然展现出了 x 、 y 方向的平移自由度，绕 z 轴的旋转自由度，以及一些特定的切变运动。这些运动，由于不伴随弹性势能的增减，统一归类为力学零模。进一步细分，图2(a)–(c)中的整体平动和转动模式是平庸的力学零模；而图2(d)展示的运动模式是非平庸的力学零模，人们进一步称之为力学软模(mechanical floppy mode)。力学软模在日常生活中广泛存在，如展示的切变运动便是其典型代表。力学软模的关键特性在于其刚度为零，这一属性对力学结构的稳定性具有决定性作用。图2(e)所示的机械结构是不稳定的，而图2(f)所示的结构表现出力学稳定性。因此，力学软模对结构稳定性有重要影响，它们的存在与否直接关系到结构的稳固性。

自应力模式(state of self-stress)是弹性网络的另一个重要概念。与力学软模相反，它表示的是结构内部的高刚度状态。图2(f)所示的框架没有力学软模而处于力学稳定的状态，如果我们再在对角线增加一根弹性约束，如图2(g)所示，那么所有弹簧都会产生非零的弹力，并且所有质点都达到力平衡状态。这种状态就是自应力状态，即非零弹力满足力平衡条件。力学软模和自应力的数量直接影响弹性网络的力学和声学性质。这些数量的计算遵循麦克斯韦计数规则，具体细节可参考文献[17]。

2.2 兼容矩阵和平衡矩阵

为了深入研究力学软模和自应力，人们在弹性网络中引入“兼容矩阵”和“平衡矩阵”这两个物理概念。在弹性网络中，用 u_i 表示第 i 个质点的位移，用 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ 表示所有质点的位移；用 δL_j 表示第 j 根弹簧的形变量，用 $\delta \mathbf{L} = (\delta L_1, \delta L_2, \dots, \delta L_N)$ 表示所有弹簧的形变量。质点组的位移向量 \mathbf{u} 与弹簧的形变向量 $\delta \mathbf{L}$ 之间存在着紧密的关联。为了量化这种关系，我们定义兼容矩阵 \mathbf{C} ，它是一个以弹簧约束数目和质点自由度数目为维度的矩阵，通过线性变换 $\mathbf{C}\mathbf{u} = \delta \mathbf{L}$ ，把质点的位移空间映射到弹簧的形变空间上，将二者联系在一起。值得注意的是，力学软模作为一类特殊的位移模式，其特点是不引起任何弹性形变，导致弹性网络形变量 $\delta \mathbf{L} = 0$ 。因此，力学软模自然地落入了兼容矩阵 \mathbf{C} 的零空间。

另一方面，在弹簧系统中用 t_j 表示第 j 根弹簧的内力，用 $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_N)$ 表示所有弹簧的内力；用 f_i 表示第 i 个质点所受合力，用 $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ 表示所有质点的受力。弹簧组的内力 \mathbf{t} 和质点合力

\mathbf{f} 之间，通过平衡矩阵 \mathbf{Q} 建立联系。平衡矩阵 \mathbf{Q} 是一个以质点自由度和网络约束数目为维度的矩阵，通过 $\mathbf{Q}\mathbf{t} = \mathbf{f}$ ，把弹簧内力映射到质点受力的线性空间上，将二者联系到一起。值得一提的是，在自应力状态下，尽管弹簧内部存在复杂的内力分布，但整个质点组却保持力学平衡，所受合力 $\mathbf{f} = 0$ 。这一特性使得自应力状态对应于平衡矩阵 \mathbf{Q} 的零空间。

兼容矩阵与平衡矩阵的引入，不仅能刻画软物质及弹性网络中的静力学现象，而且为探索动力学问题提供了强有力的工具。质点组的动态演化遵循牛顿第二定律 $\mathbf{F} = m d^2\mathbf{u}/dt^2$ ，其中 m 代表弹性网络中质点的质量， \mathbf{u} 为质点组的位移向量。当我们将这一动力学方程转换至傅里叶频率空间进行考察时，可以推导出方程形式： $\mathbf{D}\mathbf{u} = m\omega^2\mathbf{u}$ ，其中 ω 代表质点组运动的角频率。在此方程中，动力学矩阵 \mathbf{D} 扮演了核心角色，它是由平衡矩阵 \mathbf{Q} 与兼容矩阵 \mathbf{C} 通过 $\mathbf{D} = \mathbf{Q}\mathbf{C}$ 的方式组合而成的。动力学矩阵在力学分析中占据重要地位，本征值直接关联于弹性网络的简正频率，而本征矢量则对应着网络的简正模式，两者共同构成了理解弹性力学行为的关键要素。以一维弹性网络为例，动力学矩阵的本征值解析了网络中的声子谱频率分布，而本征矢量则描绘了声波在网络中传播的特定波形。这些概念广泛应用于材料科学、凝聚态物理等多个领域，为复杂力学系统的分析奠定了坚实的理论基础。

2.3 等静定系统

在探讨软物质弹性网络模型时，我们可依据自由度和约束数目的相对关系，将其划分为三大类别：超静定网络(自由度 > 约束数目)、等静定网络(自由度 = 约束数目)，以及次静定网络(自由度 < 约束数目)。图3直观展示了超静定、等静定及次静定网络的典型实例。本文聚焦于等静定网络，它因独特的力学特性而备受关注。

等静定网络的自由度与约束数目精确匹配，这使得其力学性质微妙地平衡于稳定与不稳定之间，既没有力学软模也没有自应力存在。进一步

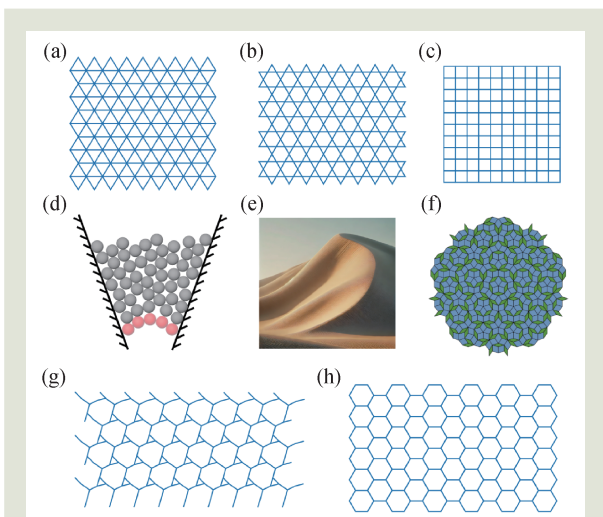


图3 (a)二维空间的三角晶格是典型的超静定结构；(b, c)笼目晶格和正方晶格是典型的等静定结构；(d—f)自然界中颗粒物质的阻塞、沙堆的结构、彭罗斯拼接都是典型的等静定软物质；(g, h)六角手性晶格和蜂窝晶格是典型的次静定结构

地，当我们调整等静定网络的边界条件，如切开边界约束以减少约束数目，原本封闭的周期性边界将转变为开放边界，此时开放边界上便会显现出力学软模。第三章我们将深入剖析这些出现在开放边界上的力学软模，及其蕴含的拓扑物理性质。

相比之下，超静定与次静定网络则因自由度与约束数目的不匹配而展现出截然不同的力学行为。超静定网络因约束过剩而承载盈余的自应力，表现出极高的刚性；次静定网络则因自由度过剩而富含力学软模，使超静定和次静定结构的拓扑力学性质相对模糊。我们将在第四章简要介绍超静定晶格中拓扑力学的研究进展。

3 软物质拓扑力学理论

3.1 研究零频率拓扑力学模式的意义

基于牛顿力学与拓扑能带理论的研究基础，前人已在弹性网络中针对非零频率($\omega \neq 0$)的拓扑力学模式进行了详尽探讨。这些聚集在材料边界的力学/声学非零频率激发态^[18–26]，在科学与工程领域展现出重要的研究价值，涵盖了力学拓扑绝缘体、力学谷霍尔效应、力学外尔超材料以及非阿贝尔力学和声学等多个前沿方向^[27–32]。弹性网络的牛顿方程可简洁表述为 $Du = m\omega^2u$ ，其中 ω 代表网络集体振荡的角频率， D 是动力学矩阵。 D 的本征值与角频率的平方成正比，因此它必然是一个正定矩阵。当动力学矩阵的能谱展现出拓扑结构时，弹性材料的边界会出现特定的力学/声学集体振荡模式，它们的频率位于力学能谱的带隙之内，因此频率不为零。根据拓扑能带理论，即便网格内部的弹性耦合和几何构型存在随机波动，这些边缘力学模式依然存在，展现出“空间尺度上的拓扑稳定性”。

然而，阻尼在经典力学中无处不在。缺乏外界能量输入时，阻尼将导致这些非零频力学振荡的能量逐渐耗散，直至完全消失。因此，尽管这

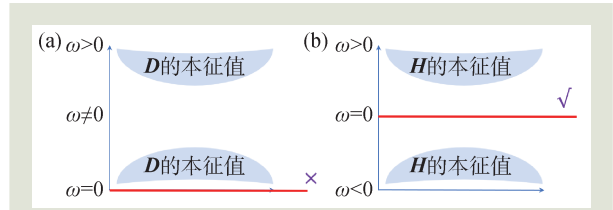


图4 (a)动力学矩阵 D 的能谱，拓扑力学模式出现在能带隙内，由于动力学矩阵 D 是正定矩阵，因此拓扑力学的频率不为零，在零频率没有边缘态；(b)薛定谔方程的能谱可以有正有负，因此量子系统允许零频率的拓扑模态存在

些频率不为零的拓扑力学模式在空间尺度上展现出稳定性，但在缺乏外界能量补给的情况下，这些模式在时间尺度上是没有稳定性的。

于是，一个自然而然的问题浮现：在力学系统中，我们能否探寻到零频率的拓扑力学模式，不仅需要在空间尺度上维持拓扑稳定性，同时也在时间尺度上展现出稳定性？值得注意的是，零频率的拓扑模态在量子力学中已经获得了广泛研究。因此，为了深入探究零频率的力学拓扑模态，我们有必要将经典力学中的牛顿方程与量子力学中的薛定谔方程进行类比分析。

3.2 给牛顿方程“开根号”，建立软物质拓扑力学理论

如图4所示，初观之下，经典力学与量子力学似乎迥异——牛顿方程是时间的二阶导数，动力学矩阵 D 为正定矩阵；而薛定谔方程则是时间的一阶导数，哈密顿量本征值既可正亦可负。依据拓扑能带理论，拓扑模态的频率仅能在能谱的带隙内出现，因此，在经典力学体系中，拓扑力学模态的频率无法为零，这与量子力学中允许存在零频率的拓扑模态形成了鲜明对比。

令人意想不到的是，牛顿系统与量子力学之间实际上存在着深刻的内在联系。为了揭示这两者之间的联系，Kane 和 Lubensky 从狄拉克方程中汲取了灵感^[33]。他们效仿狄拉克以“平方根”的方式处理克莱因-戈登方程的方法，对牛顿方程中的动力学矩阵也进行了平方根操作，从而得到了“根号下的牛顿动力学矩阵” H 。

$$H = \begin{pmatrix} 0 & C \\ Q & 0 \end{pmatrix}, H^2 = I_2 \otimes D. \quad (1)$$

矩阵 H 的能谱与 “ $\pm\sqrt{D}$ ” 是完全一致的，但它们的零空间存在一些差异。具体而言，牛顿动力学矩阵 D 的零空间仅由力学软模构成，这些软模运动反映了牛顿弹性网络在不产生弹性势能的情况下的行为；而“根号下的牛顿动力学矩阵” H 的零空间则由力学软模和自应力模式共同组成，这两种模式都反映了弹性网络的力学平衡态。

值得注意的是，等静定网络中自由度与约束的相等特性，使得其兼容矩阵 C 与平衡矩阵 Q 均为方阵，这使得有效牛顿哈密顿量 H 展现出一种特殊的手征对称性。具体而言，存在一个幺正矩阵 σ_z 与 H 反对易：

$$\{H, \sigma_z\} = 0. \quad (2)$$

公式(2)所揭示的手征对称性具有两个重要的引申含义。首先，这一对称性意味着“根号下的牛顿动力学矩阵” H 的能谱会以 $\pm\omega$ 的形式成对出现，形成类似于量子力学薛定谔方程的谱结构。其次，手征对称性确保了拓扑力学模式会出现在 H 的能谱带隙内，并且其频率严格为零，这代表了一种特殊的拓扑力学软模，与前人研究的非零频力学拓扑模式有着本质的区别。进一步地，这些正负成对出现的能谱在动量傅里叶倒空间中具有拓扑结构，从而定义了一个拓扑绕数，由下式给出：

$$N_i(\mathbf{k}) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{b}_i} d\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} \ln \det C(\mathbf{k}), \quad (3)$$

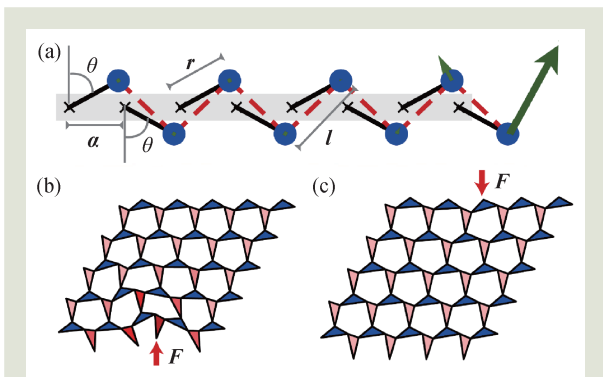


图5 (a)一维拓扑力学超材料，力学软模局域在材料的右边界；(b, c)二维拓扑力学超材料，下边界柔软，而上边界坚硬^[33]

其中 $C(\mathbf{k})$ 是傅里叶动量空间中的兼容矩阵， $\mathbf{b}_i = 2\pi\epsilon_{ijk} \frac{\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k}{\mathbf{a}_i \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}$ 是傅里叶倒空间的格矢， $i, j, k = 1, 2, 3$ 表示三维空间中的基矢指标， \mathbf{k} 是三维空间中的波矢，积分环路 $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{b}_i$ 沿着平行于 \mathbf{b}_i 的直线进行。

我们进一步定义拓扑极化矢量 $\mathbf{R}_T = \sum_i N_i \mathbf{a}_i$ ，其具有重要的物理意义。当等静定弹性网络边界承载拓扑极化矢量 \mathbf{R}_T 时，会诱发一种具有拓扑稳定性的力学软模，这些软模局域在拓扑极化矢量所标识的开放边界处，而与之相反的边界则展现出拓扑稳定的自应力特性。图5展示了典型的拓扑等静定结构，具有“拓扑极化”的力学性能：其下开放边界一侧非常柔软，上边界则非常坚硬，且相邻平行开放边界间的软硬刚度差异可超过千倍。这深刻揭示了拓扑极化矢量的物理内涵：引导拓扑力学软模汇聚于指定晶格开放边界，导致该边界非常柔软，而其反向边界则非常坚硬。

此类等静定力学模型，凭借其独特的拓扑保护极化矢量特性，对外界的轻微扰动及材料内部的缺陷展现出稳定性。其固有的拓扑力学特性不仅确保了整体结构的稳定性，即便在材料被分割成若干独立部分后，每一部分仍能维持显著的软硬对比特性。这一独特的性质与超材料的创新结合，预示着拓扑力学超材料的诞生，它们将拥有超乎寻常的力学性能。鉴于“等静定系统”、“力学软模”及“自应力”等核心概念均源自软物质物理领域，我们将这类力学材料命名为“软物质拓扑力学超材料”。

4 拓扑力学超材料

4.1 具有规则结构的拓扑力学超材料

零频率拓扑力学模式在超材料和软物质领域已成为研究热点，在一维与二维的规则(晶格)系统中的特性已被深入探索。最近，科研人员更将这一前沿概念拓展至三维空间，成功揭示了三维拓扑力学绝缘体的存在。

一维软物质拓扑力学材料的起源可追溯至

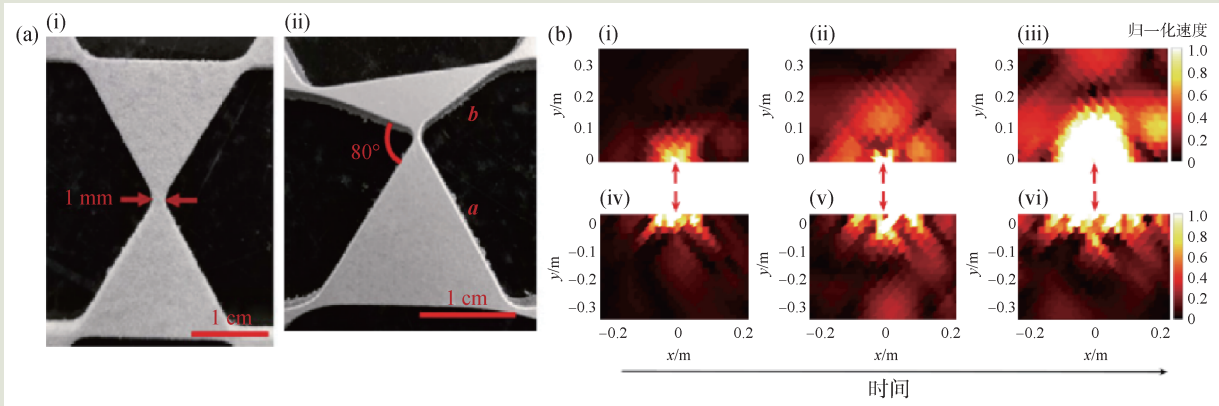


图6 具有弯曲刚度的拓扑塑料材料 (a)平庸(i)和拓扑(ii)笼目晶格的原胞几何结构; (b)拓扑笼目晶格中不同方向的声波传输率展示出极大差异^[38]。在(b)图的(i)–(iii) (及(iv)–(vi))中, 研究者在拓扑弹性体的硬边界(及软边界)上施加了约3000 Hz的突发性激励信号, 并记录了弹性体内速度场的空间分布。可以看到, 在硬边界观察到快速传播的波, 相比之下, 在软边界能量局限于边界附近

Kane 和 Lubensky 的开创性工作^[33], 如图 5(a)所示。该材料基于力学 SSH 模型构建。每个原胞包含两个可绕固定轴旋转的转子, 转子间通过弹簧相连。这种力学结构巧妙地实现了两自由度与两约束的平衡, 符合“等静定晶格”的定义。在图 5(a)所示的结构中, 拓扑极化矢量 $\mathbf{R}_T = \mathbf{a}$, 其中 \mathbf{a} 是晶格矢量。拓扑极化矢量明确指示了力学极化方向: 一维链的右边界展现出显著的柔软性, 伴随着局部的拓扑力学软模, 而左边界则保持坚硬, 无软模出现。

二维软物质拓扑力学超材料的典型代表是广义笼目晶格^[34, 35], 如图 5(b), (c)所示。原胞由上下两个形态各异的三角形构成, 打破了空间反演对称性。原胞内自由度与约束的精确匹配(均为 6 个), 确保了其“等静定性”。通过计算拓扑极化矢量, 我们发现 $\mathbf{R}_T = \mathbf{a}_2$ (\mathbf{a}_1 和 \mathbf{a}_2 是晶格基矢)。实验与数值模拟均证实, 拓扑力学软模聚集在晶格的下边界, 赋予其下边界以柔软特性, 而上边界则保持坚硬, 软硬刚度差异可达千倍以上。

上述关于软物质拓扑力学材料的探讨, 主要聚焦于等静定系统范畴。然而, 弯曲刚度在实际材料中无处不在^[36, 37], 而且对于增强力学稳定性具有显著效果, 因此在这些具有弯曲刚度的材料中探究拓扑力学, 显得尤为重要。研究揭示, 当弯曲刚度可视为微扰因素时, 这类超静定结构也能展现出拓扑极化的表面弹性^[38]。如图 6 所示,

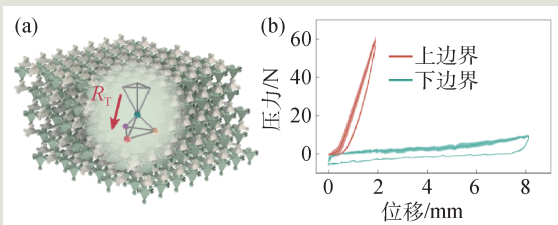


图7 三维拓扑力学超材料 (a)三维拓扑力学晶格的示意图及原胞结构; (b)三维拓扑超材料的上下开边界的力—位移曲线测量。下边界柔软, 上边界坚硬^[42]

微小弯曲刚度在保证拓扑极化弹性的前提下, 巧妙地提升了原本处于零频率的拓扑力学软模, 使其转变为非零频率的拓扑力学软模, 从而丰富了材料的动态响应特性。这些非零频率的拓扑声学模式进一步展示出非对称的传输特性。声波在沿不同方向(从上至下与从下至上)传输时, 其效率差异可达十倍以上, 反映了拓扑极化与弯曲刚度耦合对材料声学性能的影响。

尽管软物质拓扑力学超材料在一维^[39]和二维系统内的研究已相当深入, 但将其拓展至三维空间却面临着物理概念层面上的重大挑战。三维材料普遍存在力学外尔线^[20, 37, 40, 41], 严重干扰拓扑力学特性, 导致“极端软硬对比, 刚度差异超千倍”难以实现。在最新研究中^[42], 研究人员通过创新的转移矩阵解析方法, 成功在三维材料中剔除外尔线, 达到拓扑极化状态。利用 3D 打印技术, 研究团队首次在三维尺度上实现了极化的拓扑弹性。如图 7 所示, 材料下边界展现出拓扑稳定的

软模特性，而上边界则表现出拓扑自应力，两者间的刚度差异可达近15倍。相较于一维和二维拓扑力学超材料，三维材料展现出了更为优越的性能特点。例如，低维材料常因“面外运动”导致弯曲大变形，从而失去拓扑力学性能，这限制了其应用潜力。而三维拓扑力学材料能在所有空间维度上保持拓扑极化的性质，有效克服了这一

局限性，为材料科学领域开辟了新的研究方向和应用前景。

4.2 无序软物质中的拓扑力学性质

迄今为止，很多软物质拓扑力学的研究都围绕晶格结构展开。但在软物质问题中，晶格结构并不常见，反而是无序系统更为普遍，因此研究无序结构中的拓扑力学特性，对理解软物质更为重要。

准晶材料在软物质和材料力学研究中占据重要位置(图8(a))。与常见的晶体材料不同，准晶有独特的高硬度和耐腐蚀等优秀特性。研究准晶，不仅能帮助我们探索高维度的物理现象，还能推动力学材料的创新设计。为此，人们提出了“准晶拓扑力学材料”的新概念，发现准周期网络中也可以涌现受拓扑保护的力学软模^[43]，一些部分可以比其他部分柔软一千倍以上。这种准周期拓扑力学软模还具有比晶体更灵活的旋转对称性，使得我们可以设计出能在任何方向上传导声波的波导管(图8(b))。

纤维网络是材料科学和生物物理中的一个重要概念，它的应用范围很广，从胶体网络到上皮组织，都能基于纤维网络模型来研究。有趣的是，即使是完全随机的纤维网络，只要设计得当，也能展现出拓扑稳健的力学性能。如图8(c)所示，如果我们轻微拉动纤维的一端，从而改变整个网络的几何构型，那么在被拉的纤维另一端，会出现一个拓扑稳定的力学软模^[44]，使纤维弹性体的一角变得柔软，而另一角则非常坚硬，刚度差异可达一千倍(图8(d))。这种拓扑力学软模在多个领域都有广泛应用。在仿生设计中，只需稍微拉动纤维的一端，材料另一端就会变得非常柔软，从而模仿生物

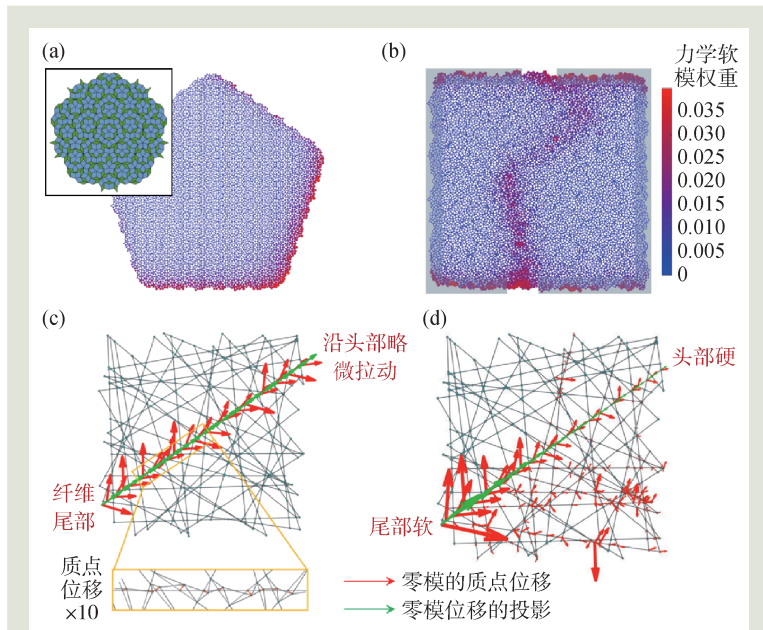


图8 强无序拓扑软物质材料 (a)准晶拓扑力学超材料^[43]：左上角是普通彭罗斯拼接准晶，不具备拓扑力学软模；右下角是变形彭罗斯拼接准晶，展现出局域在结构边界的拓扑力学软模；(b)通过将拓扑极化方向相反的准晶在边界处对接，拼接区域呈现出拓扑力学软模，这一特性使其能够作为“拓扑力学波导管”使用；(c)由直线构成的软物质纤维材料^[44]，并未展现出拓扑力学软模的特征；(d)当轻微拉动一根纤维的“头部”时，整个纤维网络构型会随之改变，拓扑力学软模出现在被拉动纤维的“尾部”

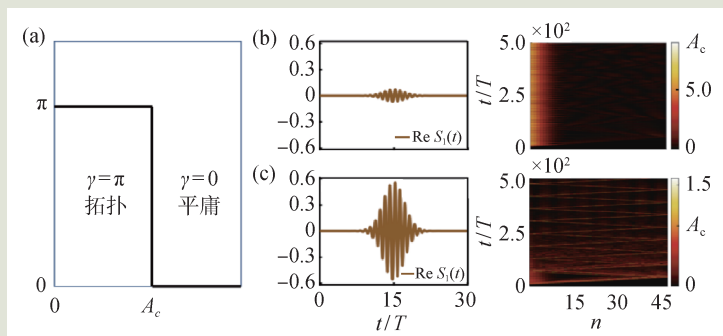


图9 非线性拓扑能带理论和数值模拟^[51] (a)由于幅值变化导致拓扑相变；(b)当外界激励信号为小振幅时，非线性材料处于拓扑状态，表现出局限于材料边界的“非线性拓扑响应”特性；(c)当外界激励信号为大振幅时，非线性材料处于平庸状态，展现出类似于孤子来回弹跳的行为

的爬行。此外，这种特性还为开发可自由调节、具有高度极化性能的力学纤维材料提供设计思路。

4.3 非线性软物质拓扑力学超材料

在前面的章节里，针对线性力学问题，我们在等静定系统中讨论了拓扑力学特性，接下来将讨论非线性拓扑力学问题。在软物质体系中，大尺度几何变形和非线性现象^[45-49]频繁出现，这突显了将非线性理论^[50]与软物质力学相结合的重要性。因此，研究者们开始将注意力转向非线性与拓扑软物质力学的交叉领域，提出了“非线性拓扑不变量”这一创新概念，构建了非线性拓扑弹性力学的理论体系^[51, 52]。这一理论的核心在于，非线性拓扑数能够随着系统振幅的变化而发生整数级的突变(图9)，从而展示出振幅变化所导致的非线性拓扑转变^[53]。

我们进一步将非线性拓扑理论拓展至材料力学领域，理论分析与实验验证相结合，揭示了非线性诱导下材料力学发生拓扑相变的内在机制。这一发现不仅丰富了我们非线性软物质力学的认识，还为实现“边界软硬刚度完全反转”这一独特功能提供了全新思路。

参考资料[54]所设计的异形齿轮超构材料，严格遵循软物质的“等静定原理”，展现出受拓扑保护的非线性力学特性(图10(a), (b))。如图10(c)所示，材料右边界具有拓扑力学软模。这种等静定软材料能实现非线性拓扑力学转变到达图10(d)所示的状态，材料左右边界实现“软—硬”至“硬—软”的刚度完全反转。这种反转特性是线性材料所无法企及的，它源自软物质等静定结构与非线性拓扑理论的结合。同时，材料的轻量化特性为软体机器人自适应关节的设计开辟了新的路径。

5 结语与展望

在拓扑力学超材料这一前沿领域，研究者们巧妙地将软物质物理、拓扑能带理论和非线性力学等截然不同的学科领域相结合，以软物质等静

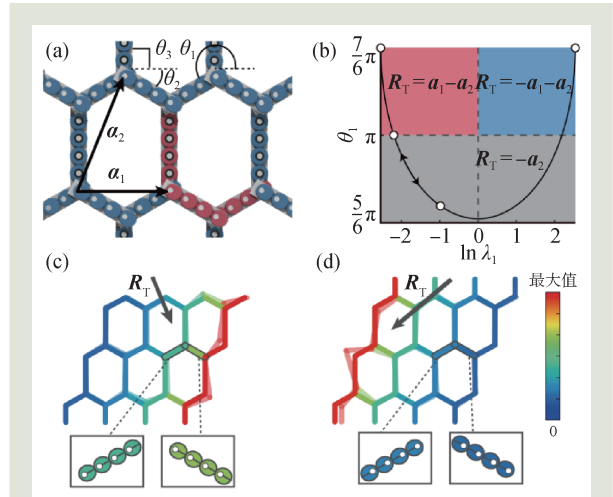


图10 非线性拓扑力学超材料 (a)异形齿轮超构材料的设计蓝图。其基本单元，即原胞，由三条装备有异形齿轮的超构链巧妙组合而成。在竖直方向上，研究者利用铰链将这些原胞相互连接，从而构建出一种非线性拓扑力学超材料；(b)异形齿轮超构材料的拓扑相图。通过计算拓扑极化矢量 R_T ，该相图以红色、蓝色和灰色标记出三种不同的拓扑相，每一种颜色对应着一种独特的拓扑力学性质，这一点在图(c)和(d)中得到了展示；(c)异形齿轮超构材料左边硬右边软；(d)异形齿轮超构材料右边硬左边软^[54]

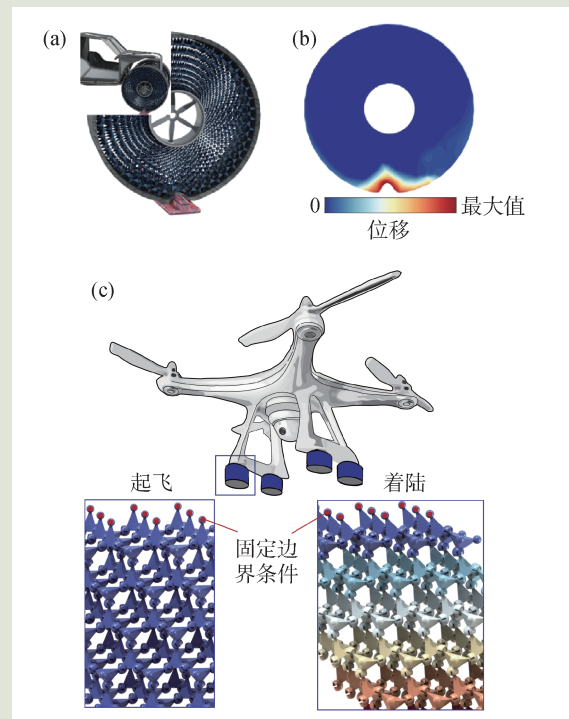


图11 力学软模和自应力在软物质物理问题和工程力学中的重要应用 (a)拓扑超材料用于免充气的全地形拓扑轮胎；(b)全地形拓扑轮胎变形仿真；(c)拓扑超材料用于无人机起落架减振^[42]

定系统为探索载体,成功设计出了一系列具有非凡拓扑力学性能的新概念材料^[55-58]。这些开创性的成果不仅拓宽了人们的认知,而且为实际应用领域铺设了宽广的道路。

首先,这些研究成果为生物材料及软物质力学机制的深入研究开辟了新方向,有望为细胞运动的仿生学提供思路。其次,对拓扑弹性体的探索不仅为拓扑理论物理的深化研究搭建了实验平

台,还激发了其他拓扑超材料系统如拓扑集成电路、拓扑声学的研究。再者,三维拓扑软材料所展现出的独特性能,如柔性吸能、高度稳定性及自适应特性,使其在多个颠覆性应用领域中展现出巨大潜力。这些材料可望应用于自适应性软体机器人的创新设计,打造出刚柔并济的可穿戴外骨骼,以及开发出无需充气的全地形拓扑轮胎、无人机起落架减振器^[42](图11)等。

参考文献

- [1] Guidolin C, Intyre J M, Rio E *et al.* Nat. Commun., 2023, 14: 1
- [2] Zheng Q, Yu A. Phys. Rev. Lett., 2014, 113: 6
- [3] Ma L L, Li C Y, Pan J T *et al.* Light Sci. Appl., 2022, 11: 1
- [4] Zhao Y, Hu H, Huang Y *et al.* Nat. Commun., 2024, 15: 1
- [5] Bi D, Yang X, Marchetti M C *et al.* Phys. Rev. X, 2016, 6: 2
- [6] Li F, Gao Y, Zhang C *et al.* Polymer, 2020, 208: 3
- [7] Barré C, Page G, Talbot J *et al.* Phys. Rev. E, 2019, 99: 4
- [8] Franz S, Hertz J. Phys. Rev. Lett., 1995, 74: 11
- [9] Ton A T, MacKeith A K, Shattuck M D *et al.* Phys. Rev. Res., 2024, 6: 1
- [10] Kaliman S, Hubert M, Wollnik C *et al.* Phys. Rev. X, 2021, 11: 3
- [11] Picu R. Soft Matter, 2011, 7: 15
- [12] Chen Y, Ai B, Wong Z J. Nano Converg., 2020, 7: 1
- [13] Micoulaut M. Rep. Prog. Phys., 2016, 79: 6
- [14] Babilas R, Młynarek K, Łoński W *et al.* J. Alloys Compd., 2021, 868: 159241
- [15] [https://en.wikipedia.org/wiki/Chirality_\(physics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Chirality_(physics))
- [16] Novoselov K S, Geim A K, Morozov S V *et al.* Science, 2004, 306: 5696
- [17] Lubensky T C, Kane C L, Mao X *et al.* Rep. Prog. Phys., 2015, 78: 7
- [18] Mitchell N P, Nash L M, Hexner D *et al.* Nat. Phys., 2018, 14: 380
- [19] Yan M, Lu J, Li F *et al.* Nat. Mat., 2018, 17 (11): 93
- [20] Stenull O, Kane C L, Lubensky T C. Phys. Rev. Lett., 2016, 117: 068001
- [21] He C, Ni X, Ge H *et al.* Nat. Phys., 2016, 12: 12
- [22] Lu J, Qiu C, Ye L *et al.* Nat. Phys., 2017, 13: 4
- [23] He H, Qiu C, Ye L *et al.* Nature, 2018, 560: 7716
- [24] Rosa M I N, Pal R K, Arruda J R F *et al.* Phys. Rev. Lett., 2019, 123: 3
- [25] Süssstrunk R, Huber S D. Science, 2015, 349: 6243
- [26] Süssstrunk R, Huber S D. Proc. Natl. Acad. Sci., 2016, 113: 33
- [27] Jiang B, Bouhon A, Lin Z K *et al.* Nat. Phys., 2021, 17: 11
- [28] Fruchart M, Zhou Y, Vitelli V. Nature, 2020, 577: 636
- [29] Lei Q L, Zheng W, Tang F *et al.* Phys. Rev. Lett., 2021, 127: 1
- [30] Lei Q L, Tang F, Hu J D *et al.* Phys. Rev. Lett., 2022, 129: 12
- [31] Chen Y, Liu X, Hu G. J. Mech. Phys. Solids., 2019, 122: 54
- [32] Zhang Q, Chen Y, Zhang K *et al.* Extreme Mech. Lett., 2019, 28: 76
- [33] Kane C L, Lubensky T C. Nat. Phys., 2014, 10: 39
- [34] Rocklin D Z, Zhou S, Sun K *et al.* Nat. Commun., 2017, 8: 1
- [35] Paulose J, Chen B G, Vitelli V. Nat. Phys., 2015, 11: 2
- [36] Zunker W, Gonella S. Extreme Mech. Lett., 2021, 46: 101344
- [37] Bergne A, Baardink G, Loukaides E G *et al.* Extreme Mech. Lett., 2022, 57: 101911
- [38] Ma J, Zhou D, Sun K *et al.* Phys. Rev. Lett., 2018, 121: 094301
- [39] Chen B G, Upadhyaya N, Vitelli V. Proc. Natl. Acad. Sci., 2014, 111: 36
- [40] Bilal O R, Roman S, Chiara D *et al.* Adv. Mater., 2017, 29(26): 1700540
- [41] Baardink G, Anton S, Jayson P *et al.* Proc. Natl. Acad. Sci., 2018, 115(3): 489
- [42] Tang Z, Ma F, Li F *et al.* Phys. Rev. Lett., 2024, 133: 106101
- [43] Zhou D, Zhang L, Mao X. Phys. Rev. X, 2019, 9: 2
- [44] Zhou D, Zhang L, Mao X. Phys. Rev. Lett., 2018, 120: 6
- [45] Chaunsali R, Theocharis G. Phys. Rev. B, 2019, 100: 1
- [46] Zhou D, Ma J, Sun K *et al.* Phys. Rev. B, 2020, 101: 104106
- [47] Rosa M I N, Leamy M J, Ruzzene M. New J. Phys., 2023, 25: 103053
- [48] Manda B M, Chaunsali R, Theocharis G *et al.* Phys. Rev. B, 2022, 105: 10
- [49] Kevrekidis P G, Malomed B A, Gaididei Y B. Phys. Rev. E, 2002, 66: 1
- [50] Kevrekidis P G, Frantzeskakis D J. Reviews in Physics, 2016, 1: 140
- [51] Zhou D, Rocklin D Z, Leamy M *et al.* Nat. Commun., 2022, 13: 3379
- [52] Zhou D. New J. Phys., 2024, 26: 073009
- [53] Tempelman J R, Matlack K H, Vakakis A F. Phys. Rev. B, 2021, 104: 17
- [54] Ma F, Tang Z, Shi T *et al.* Phys. Rev. Lett., 2023, 131(4): 046101
- [55] Huang J, Zhang J, Xu D *et al.* Current Opin. Solid State Mater. Sci., 2023, 27: 101053
- [56] Chen Y F, Chen Z G, Ge H *et al.* Interdisciplinary Materials, 2023, 2: 2
- [57] Wang A, Meng Z, Chen C Q. Sci. Adv., 2023, 9: 27
- [58] Vakakis A F, Manevitch L I, Gendelman O *et al.* J. Sound Vib., 2003, 264: 3