

庞加莱的狭义相对论之一 洛伦兹群的发现

金晓峰[†]

(复旦大学物理学系 上海 200438)

2022-02-14收到

[†] email: xfjin@fudan.edu.cn

DOI: 10.7693/wl20220309

对大多数人而言, 麦克斯韦最伟大的成就是统一了光学与电磁学。然而, 他留下的这个领域远非完美, 诸多疑惑尚待澄清, 比如光的色散、磁光效应, 特别是运动物体的光学现象等, 都没有电磁解释。针对这些问题, 洛伦兹提出了他的电子理论, 并在同期的众多理论中脱颖而出。洛伦兹的坐标变换、局域时间、对应态、长度收缩以及质量的速度依赖公式等新想法和新概念, 直接导致了狭义相对论的诞生。正是在这样的背景下, **庞加莱和爱因斯坦于1905年分别独立地提出了狭义相对论**。本文通过历史回顾和文献综述, 希望得到如下基本结论: (1)假设(也仅仅是假设)要颁一个有关狭义相对论的诺贝尔物理学奖, 那么洛伦兹、庞加莱和爱因斯坦当之无愧; (2)假设只有一个人的名字可以用来冠名狭义相对论, 那么庞加莱比爱因斯坦更有资格获得这个殊荣, 也就是说, 我们应该称它为庞加莱的狭义相对论; (3)最合理的当然是, 我们应该把狭义相对论称为庞加莱—爱因斯坦狭义相对论。

“不会又是标题党吧? 我们只听说过爱因斯坦的狭义相对论, 从没听说过什么庞加莱的狭义相对论!” 无论在物理圈内还是圈外, 产生同样的疑惑一点也不奇怪, 即使是笔者自己, 一年半前如果看到这样的题目, 也会这样想。那么, 这一百八十度的转变是怎么发生的呢? 原因很简单, 是下面这两本书特别是第二本颠覆了我原来的想法: (1)O. Darrigol的《从安培到爱因斯坦的电动力学》^[1], (2)A. A. Logunov的《亨利·庞加莱与相对论》^[2]。前一本书及其参考文献比较详细地介绍了庞加莱(图1)在狭义相对论上的早期历史贡献(1905年之前); 后一本书, 特别是Logunov对庞加莱原始文章的导读(图2)^[3], 令人信服地证明: 庞加莱在1905年已完整地建立了狭义相对论的全部内容。

正是由于这一转变, 才有了2020年10月16日在复旦大学物理系教师午餐沙龙上的报告: “通往狭义相对论之路——对亨利·庞加莱迟到的致敬”。因为“蔻享科学”平台在网上进行了直播^[4], 所以除了现

场讨论之外, 会后还收到不少反馈。其中, 有朋友建议, 是否能将口头报告转换成书面文字, 正式在中文期刊上发表。然而, 由于这个问题的复杂性和敏感性, 从口头报告变成书面语言, 意味着繁重的艰苦劳动。经过一年多的犹豫, 最终还是下定决心花点力气把它写下来, 供同行们批评指正。一年前为口头报告准备的摘要, 加了最后一句, 直接移作了本文的摘要。

1921年, 21岁的泡利在其名著《相对论》^[5]的开篇“历史背景(洛伦兹、庞加莱、爱因斯坦)”中这样说:

“现在我们来讨论洛伦兹、庞加莱和爱因斯坦的贡献, 它们包含了构成相对论基础的推理线索和发展过程。从时间上说, 洛伦兹是第一个, 他证明了无源麦克斯韦方程组在

下列坐标变换下的协变性:

$$\begin{aligned} x' &= l \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad y' = ly, \\ z' &= lz, \quad t' = l \frac{t - \left(\frac{v}{c^2}\right)x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

(笔者注: 这里的 l 是 v 的函数 $l(v)$)……我们应该强调指出, 相对性原理, 对于洛伦兹来说是陌生的。洛伦兹工作留下的一些不足, 由庞加莱补上了。庞加莱声明, 相对性原理是普适且严格有效



图1 庞加莱(Henri Poincaré, 1854—1912)

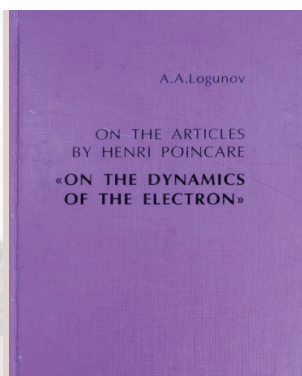


图2 Logunov著书On the articles by Henri Poincaré «On the dynamics of the electron»对庞加莱原始文章做导读



Photograph of the first conference in 1911 at the Hotel Metropole. Seated (L-R): W. Nernst, M. Brillouin, E. Solvay, H. Lorentz, E. Warburg, J. Perrin, W. Wien, M. Curie, and H. Poincaré. Standing (L-R): R. Goldschmidt, M. Planck, H. Rubens, A. Sommerfeld, F. Lindemann, M. de Broglie, M. Knudsen, F. Hasenöhrl, G. Hostelet, E. Herzen, J. H. Jeans, E. Rutherford, H. Kamerlingh Onnes, A. Einstein and P. Langevin.

图3 1911年，洛伦兹、庞加莱、爱因斯坦在第一届索尔维会议上的合影

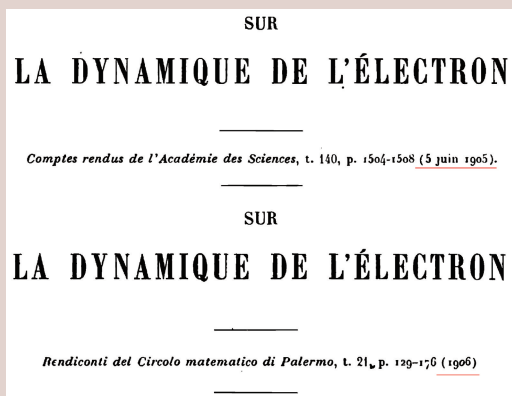


图4 庞加莱有关相对论的两篇文章

的。……他进一步纠正了在有电荷密度和电流存在情况下洛伦兹公式的错误，从而得到了有源麦克斯韦方程组的完全协变性。……最终，正是爱因斯坦，他完成了这个新领域的基本理论构造……他1905年的文章不仅包含了前面两人的主要结果，而且展示了对整个问题全新的、深刻得多的理解。”

1955年，为纪念相对论诞生50周年，此时已55岁的泡利写了一篇《相对论与科学》的小文章^[6]，其中他这样说：

“狭义相对论与数学中群的概念密切相关，若说在伽利略和牛顿的力学中只是初见端倪，那么现在已被实验事实牢固确立起来了。……19世纪电动力学的发展以麦克斯韦和洛伦兹的一组偏微分方程组而告终。很显然，这组方程不具备以前经典力学群的对称性……。现在的问题是：自然定律具有群的对称性这一说法，只是近似成立的性质而必须抛弃呢，还是经典力学的群或许只是近似有效，而应该被一个更普遍的群所替代，它同时对经典力学和电动力学都成立？最终的决定倾向于第二种选择。这个假设可由两条路径来达到。一条是用纯数学的方法，考察什么是麦克斯韦—洛伦兹

方程组协变性所满足的最一般的变换群，这是数学家庞加莱的途径。另一条是通过批判性分析，来确定那些导致伽利略和牛顿力学所采用的那种特殊群的物理假定，这是爱因斯坦的途径。……爱因斯坦和庞加莱的结果都基于洛伦兹的前期工作，他已经相当接近但未真正达到最后结果。从爱因斯坦和庞加莱各自独立的殊途同归，我体认到了数学方法与（基于物理经验基本特征的）思想实验(Gedankenexperimente)之间和谐的更深层次意义。”

比较上面两段泡利在21岁和55岁时，对同一事件所写下的不同评价很重要，至少值得注意。很显然，之前他将庞加莱与洛伦兹并列，而突出爱因斯坦的贡献；之后他将庞加莱与爱因斯坦并列，指出他们俩都基于洛伦兹的前期工作，但从两条不同的途径，殊途同归地达到了狭义相对论(图3)。爱因斯坦的狭义相对论已广为人知，而庞加莱的狭义相对论却鲜为人知。甚至在公众认知领域给人们留下了一个错觉，即没有爱因斯坦，就没有狭义相对论的诞生。这显然与历史事实不符。因此，让更多人了解庞加莱的狭义相对论就显得很有必要。

一个不得不问的问题是：如果庞加莱真的对狭义相对论做出了这么大贡献，那他的名字怎么可能会在如此众多的涉及相对论的现代教科书和专著中消失得无影无踪呢？显然，除了介绍庞加莱的狭义相对论，笔者还必须回答这个无法回避的问题。造成这一世纪级现象的原因貌似千头万绪、错综复杂，实际上却也简单到用一句话就可完全概括：事实上，不是历史对庞加莱开了一个玩笑，恰恰相反，是庞加莱对历史开了一个玩笑！接下来，我们将尽可能把整个故事的轮廓梳理清楚，通过庞加莱所开的一个个生动“玩笑”，一起领略他做学问的独特方式和他的科学哲学，一起景仰他的高贵人品。

1 庞加莱的两个“玩笑”

庞加莱有关相对论的第一篇文章于1905年6月5日发表，一个月之后的7月23日又投寄了第二篇文章(图4)^[7](爱因斯坦的三篇狭义相对论文章分别投寄于1905年6月30

日、9月27日和1906年5月17日),其中第一篇可以看成是第二篇的详细摘要或总结,我们接下来以《六月文章》和《七月文章》分别称之。庞加莱对历史开的第一个“玩笑”出现在这两篇文章的引言中。以后我们还会看到,这并不是庞加莱第一次也不是唯一的一次这么做。因为他觉得自己的这项工作是直接受到洛伦兹1904年文章启发而开展的,所以直至生命的终点,他都始终将狭义相对论的主要荣誉(credit)归功于洛伦兹,哪怕一些完全是他自己原创的想法和贡献也毫不例外,几乎全部算到洛伦兹头上。不得不说,这“玩笑”确实开得太大了,因为它给后人留下了极大的错觉,似乎庞加莱在物理上没有提出什么新东西,只是在数学上提供了一些细节。不止于此,更糟的是,庞加莱与洛伦兹在许多关键点上的想法实际上很不一样,甚至恰恰相反,比如,如何看待相对性原理、局域时间、以太等多个重要物理概念,而从今天的角度看,庞加莱是对的,洛伦兹是错的,但因为庞加莱过世较早(1912年),而洛伦兹又是一个极其坦诚且从不羞于承认自己错误的人,所以我们今天所熟知的洛伦兹在相对论上的一些错误认识,反而都被后人转嫁到了庞加莱头上。这么一来,本来极其简单而清晰的历史问题,顿时变得千头万绪、错综复杂。公平地说,这个“玩笑”绝不是历史对庞加莱开的,而恰恰是他自己对历史开的。

下面,我们来具体看看庞加莱的引言是如何写的。在《六月文章》的引言中,他首先阐明一个实验事实:所有试图测量地球相对于以太运动的实验(包括迈克尔孙实验)都以失败而告终;接着他说:

“不可能从实验上揭示地球的绝对运动似乎应该是大自然的一条普适定律。……洛伦兹尝试补充和修改之前所作的假定,用以解释这种不可能性,并在他1904年《小于光速的动系电磁现象》文章中获得成功^[8]。这个问题的重要性促使我再一次回过头来考虑它;我**这里所得的结果,在所有主要点上都与洛伦兹的结果相吻合,我只是尝试着稍作改进,并提供一些细节。**”“**这些(与洛伦兹结果的)差别又都不大重要(minor importance),**接下来会在后面的章节中加以展示。”(笔者注:后一句话为《七月文章》所加)

不知读者看到上面加黑的句子是什么感觉,笔者每次读到这里总禁不住感慨万千!试想:假如我们今天的学术论文引言这样写,而且还想在国际主要学术期刊,比如《物理评论通讯》(PRL)上发表,哪一个编辑会送审呢?这不是成心与自己过意不去嘛!且慢,这还不是最搞笑的,下面这两段才真叫人啼笑皆非:

“洛伦兹的基本想法在于,电磁场的方程组在(1)式的变换(我把它称作洛伦兹变换)下,将保持不变。”(《六月文章》)

“洛伦兹的概念,因此可以这样总结:如果赋予整个系统一个共同的平移运动而可观察现象没有任何变化,那就说明,电磁场的方程在某个变换(我们称之为洛伦兹变换)下是不变的。**如此一来,这两个系统,其中一个不动,另一个作平移运动,将互为完全相同的影像(become exact images of each other)**”(《七月文章》)

事实上,在庞加莱之前,洛伦兹从来没有这样的想法,也从来没有这样的概念,更没有如此说过!

在这里,庞加莱完全是将自己的原创性想法归功于洛伦兹!对庞加莱而言,这并不是一时兴起的偶尔为之,他始终对启发自己想法的人心怀感激,之后总会在各种场合以各种方式加以强调;反过来,为自己去力争优先权,对庞加莱而言却是完全陌生的。好在洛伦兹也是一个对个人优先权毫不在乎的真正谦谦君子,他在《庞加莱的两篇数学物理文章》^[9]中如此实话实说:

“(庞加莱《七月文章》的)公式(4)和(7)在我的1904年文章中是没有的,我甚至不知道存在一种直接的路径导出它们,因为我认为 (x, y, z, t) 和 (x', y', z', t') 这两个参照系存在本质差别。这是我当时的思路:其中一个参照系的坐标轴是固定在以太中的,那里有真实的时间;而在另一个参照系中,恰恰相反,我们只涉及(deal with)一些为数学技巧而引进的辅助量。……因此,比如变量 t' 不能被看作是变量 t 相同意义上的时间。在这样的考虑下,我完全没有意愿按 (x, y, z, t) 参照系中描述现象的方式去描述 (x', y', z', t') 参照系中的现象。……我没能证明麦克斯韦方程组的完全协变性;我的公式中还保留了一些本应消失的累赘项,只是它们在数量上很小而不会影响现象,我就是据此来解释地球的运动不会影响实验的观察,但是我没有建立起作为严格而普适真理的相对性原理。恰好相反,庞加莱证明了电动力学方程的完全协变性,并准确表达了“相对性假定”——一个由他引入的术语。事实是,正是采用了我没能想到的观点,他导出了公式(4)和公式(7)。还应该补充一点,在纠正我工作中的那些缺陷时,他从未有过任何对我的责备。”

庞加莱的第二个“玩笑”，开在对《七月文章》正文的章节安排上。《七月文章》除引言外还有9个带标题的小节，其中，他竟然把自己在相对论中最重要、影响最深远、也最能体现他远超洛伦兹的原创贡献，放在第4节而不是第1节，并且冠以“4. 洛伦兹群”的标题。前三节的标题分别是“1. 洛伦兹变换”，“2. 最小作用量原理”，“3. 洛伦兹变换与最小作用量原理”；只要细心研读过《六月文章》和《七月文章》的人，一定不难发现，庞加莱如此安排的唯一目的，就是为了突出洛伦兹的功绩，而不想以自己的工作来喧宾夺主。从今天的角度回头看，这个“玩笑”开得太大、后果太严重了。因为李群和李代数对当时的大多数数学家而言，也是新鲜且抽象的理论，对当年的物理学家来说，当然实在太超前、太高深了，几乎无人能懂，所以如果放在第1节，至少能让人知道这是全文的基础，引起人们的重视；但现在放在了第4节，确实与第3节和第5

节的内容上下不搭，除了知道洛伦兹变换构成一个群外，别的似乎都是一些不知所云的数学细节；无疑，这种“奇怪的”章节安排，客观上确实严重阻碍了庞加莱的相对论在物理学界的传播。否则，他对狭义相对论的原创性贡献，无论如何也不会被同代和后人误读。另外，因为略去了太多具体数学推导和物理文字说明，以至于半个世纪之后，当庞加莱法文的《七月文章》被翻译成英文时，还发生了译者面对整个第4节中最重要的几句话——“我们也可以另一种方式产生这个群(Nous pouvons encore engender notre groups d'une autre manière)”，一定完全不知所云，竟然干脆删去不译的尴尬局面^[10, 11]！

2 洛伦兹群的发现：归纳的一步

关于“洛伦兹群”的重要性，大概没有比爱因斯坦1950年为《科学美国人》所写《论引力的广义理论》(On the generalized theory of

gravitation)中的这一段话讲得更透彻、更深刻的了：

“麦克斯韦方程组暗示(imply)了洛伦兹群，但洛伦兹群并不暗示麦克斯韦方程组。洛伦兹群也许确实可以独立于麦克斯韦方程组，而被定义成这样一组线性变换，它确保一个特殊的速度——光速——不变。这一组变换适用于从一个“惯性系”到另一个与之匀速运动的“惯性系”的转变。这个变换群最引人注目的新特性在于，空间上异地事件的同时性概念消失了。这样，所有的物理学方程在洛伦兹变换下协变就顺理成章了(狭义相对论)。事情就是这样，麦克斯韦方程组导致了一个启发性原理(heuristic principle)，它的有效性远远超出了方程组本身之应用甚至成立范围。”

鉴于洛伦兹群对整个基础物理学的极端重要性，或许将第4节原文——难得一见的科学艺术品——直接附上会受到读者的欢迎(图5)。

虽然沃伊特(Voigt)在1887年、拉莫尔(Larmor)在1900年都分别得

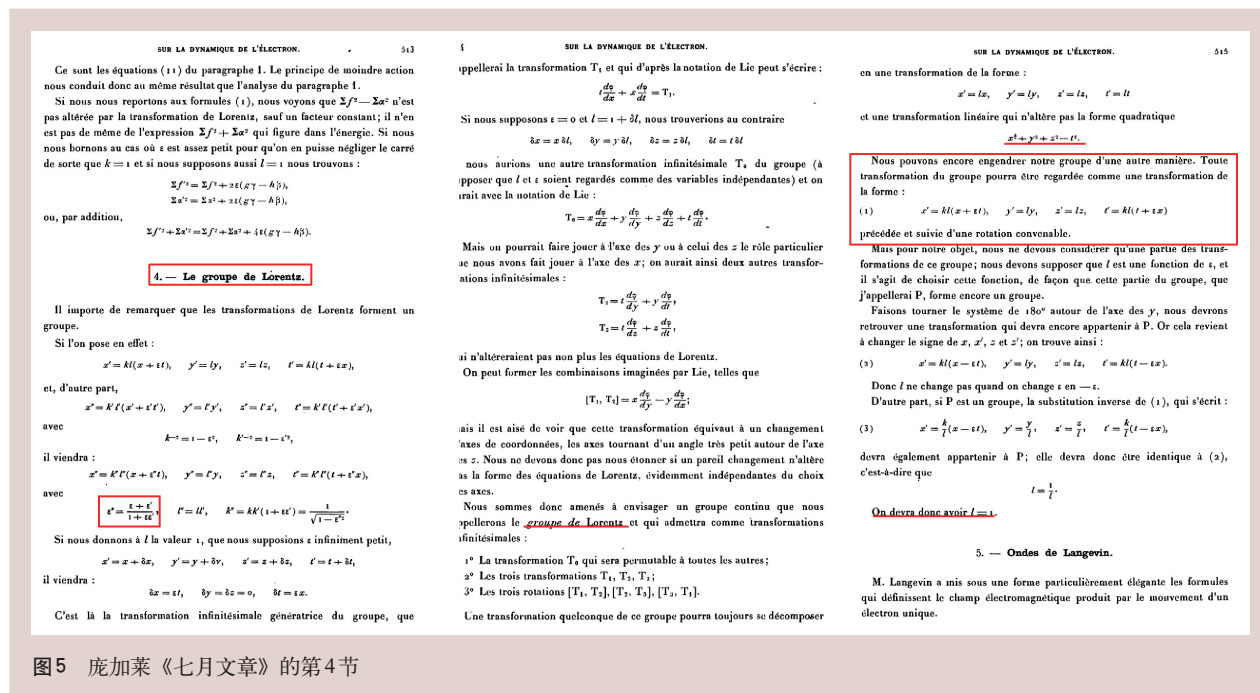


图5 庞加莱《七月文章》的第4节

到过类似于(1)式的变换式,但确实是洛伦兹1904年的结果,直接催生了庞加莱狭义相对论的诞生。无论是Voigt、Larmor还是洛伦兹,在得到他们的变换式时,具体思路可能各不相同,但一个共同的特点是,全都采用了特设(ad hoc)方式。作为大数学家和大数学物理学家,庞加莱显然比任何人都明白,如此重要的变换式必定存在一个更本质的原理式基础,而这正是他在《七月文章》“4.洛伦兹群”这一节成功奠定的。简而言之,他是通过归纳的一步和演绎的一步达到了这一目的,让洛伦兹变换式(1)从此摆脱了特设的历史,正式建立在坚实的原理之上,进而一举奠定整个狭义相对论的数学和物理基础。值得强调,庞加莱的这两步——归纳与演绎——事实上正是对应了上述爱因斯坦的两句话“麦克斯韦方程组暗示了洛伦兹群,但洛伦兹群并不暗示麦克斯韦方程组。”

百年之后回头看,或许最重要的是,庞加莱第一个清醒地认识到,时间与空间 (x, y, z, ict) (第9节上明确给出)一同构成一个四维时空,两个惯性参照系之间的所谓洛伦兹变换,只不过是这一四维时空中,保持间隔 $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$ 或微分间隔 $dx^2 + dy^2 + dz^2 - (cdt)^2$ (第9节上明确给出)不变的一个线性变换,即简单的一个四维时空坐标轴转动。(讲到这里,我们不得不提一句:此时(1905年)还没闵可夫斯基什么事,那都是三年以后(1908年)的事了,之后会详细讨论。)在对洛伦兹变换的数学结构建立了如此清晰的几何图像之后,人们熟知的那些狭义相对论的运动学基本结论,比如,“同时性的相对性”、“时间膨胀”、“长度收缩”等等,对于

庞加莱而言,简直就是小菜一碟,《七月文章》当然明确地给出了这三个公式。

接下来,让我们看看庞加莱归纳的一步。值得指出,庞加莱在《七月文章》第1节的开头就明确说:“我将这样选择长度和时间的单位,使得光速为1”,多么现代啊!因为整篇文章主要就是讨论惯性系之间各种物理量的相互变换,所以这句话当然就是明确而直接地宣告,光速是不依赖所在惯性系的一个常数;事实上,正是在他1898年《时间的测量》一文中,庞加莱第一个清楚地意识到,光速不变应该被假定为一个公设。除了取光速 $c=1$,他还取了电子静质量 $m_0=1$;这样一来,在这篇文章里,普通读者就千万别指望能找到那些似曾相识的狭义相对论公式了,因为它们早已面目全非!正是考虑到这一点,也是为了让庞加莱更接地气,我们接下来会将他的公式都换成当今教科书上的标准单位制。

庞加莱证明:以特设方式得到的洛伦兹变换式(1)构成了一个群;事实上,他也只证了关键一环,即群的封闭性(其余的太显然了!)。虽然从今天的角度看,这个贡献似乎不值一提,因为基础稍好的本科生就能做到,但在当时,世界上恐怕还真没几个人明白庞加莱究竟在干什么,因为对于物理学家来说,不仅群论是陌生的,而且全新的速度相加公式(今天被称为爱因斯坦速度相加公式)更是闻所未闻(他在第1节中,只用一行数学推导就严格证明了)。有点讽刺的是,这个在现代教科书上常常被认为“很相对论”的重要公式,庞加莱连个公式编号都没给。

庞加莱进一步阐明,洛伦兹变

换式(1)构成的群是一个叫李群(Lie group)的连续群。李群有一个重要特性:整个群的性质可以由不变元附近的群元性质完全确定,即Sophus Lie发展起来的无穷小生成元概念。这就是接下来庞加莱为什么要取 $l=1$,又假设 $\delta v/c \ll 1$ 为无穷小,从而将(1)式转换成在不变元($v=0$)附近的变换式(2)来展开讨论的道理:

$$\begin{aligned} x' &= x - \delta v \cdot t, \quad y' = y, \quad z' = z, \\ t' &= t - \frac{\delta v \cdot x}{c^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

他指出,这个变换对应于李代数中的

$$T_1 = (ct) \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial (ct)},$$

相当于沿垂直于 $x-t$ 平面的一个无穷小定轴转动。另一方面,从纯数学的角度看,也可以取 $v=0$,同时让 l 有一个无穷小变化 $l=1+\delta l$,这样

$$\begin{aligned} x' &= x + x\delta l, \quad y' = y + y\delta l, \\ z' &= z + z\delta l, \quad t' = t + t\delta l, \end{aligned}$$

对应于李代数中的

$$T_0 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} + (ct) \frac{\partial}{\partial (ct)},$$

相当于 (x, y, z, t) 的标度变化。类似地,还有 y 和 z 轴上的洛伦兹变换对应的 T_2 和 T_3 ,它们也会让麦克斯韦—洛伦兹方程保持协变性。另外,根据李代数, T_1 和 T_2 的组合:

$$[T_1, T_2] = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x},$$

则代表了沿 z 轴的空间转动,显然这也会保持麦克斯韦—洛伦兹方程的协变性(因为方程不依赖于坐标轴的选取)。类似地,也还有 x 和 y 轴上的空间转动 $[T_2, T_3]$, $[T_3, T_1]$ 。

庞加莱据此总结到:我们在这里考虑的连续群称为洛伦兹群,它共有如下无穷小生成变换:

(1)标度变换 T_0 ,它与所有变换对易;

(2) 时空转动(boost) T_1, T_2, T_3 ;

(3) 三个空间转动 $[T_1, T_2], [T_2, T_3], [T_3, T_1]$

因此,“属于这个洛伦兹群的任意变换,都可以分解成具有形式

$$x' = lx, y' = ly, z' = lz, ct' = l(ct)$$

的标度变换和保持四维间隔

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$$

不变的一个线性变换。”

至此,庞加莱从特设洛伦兹变换式(1)出发,通过不变元附近的无穷小群元分析,厘清了整体洛伦兹群的性质。最重要的是,他将两个惯性系之间的洛伦兹变换,几何化成在 (x, y, z, ict) 的四维时空中,保持四维间隔 $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$ 不变的一个线性变换。换句话说,它相当于一个具有共同原点的两个四维时空坐标轴之间的转动(第9节中明确说了)。当然,这仅仅是归纳的一步,下面是演绎的一步。

3 洛伦兹群的发现:演绎的一步

虽然为了突出洛伦兹而不想喧宾夺主,但庞加莱是一个真正的科学家,追求真理永远是摆在第一位的;对那些实际上已经超越了洛伦兹的新结果,他无法掩着不说出来。定性的,或许可以放在洛伦兹名下讲出来,如我们在他的第一个“玩笑”中所见;但定量的,这种做法肯定不行,那就只能不动声色地低调加以叙述,以下这个只有两句话的自然段落便是:

“我们也可以利用另一种方式产生这个群。这个群中的任一变换都可看成是先作一个如下形式的变换,

$$x' = l \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, y' = ly,$$

$$z' = lz, t' = l \frac{t - \left(\frac{v}{c^2}\right)x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad (3)$$

接着再作一个合适的空间转动所构成。”

请注意,如此惜墨如金的庞加莱(读者不妨尝试在原文第4节中去掉任一式子,看看文章是否还成立?),在这里不仅完全重复地抄了一遍这一节开头的第一个公式(洛伦兹特设公式),而且还竟然给了这里的公式(3)(而不是之前的特设公式)一个编号,这实在太耐人寻味了!常言道,经典值得反复阅读;或许我们可以再补充一句,庞加莱的文章更是如此。正是在这里,庞加莱提示了我们,他所说的“另一种方式”究竟是什么。同为大数学家的庞加莱,对于大师高斯的名言:“当一幢建筑物完成时,应该把脚手架拆除干净”一定不陌生,但他在这里恰恰反其道而行之,“脚手架”几乎被原封不动地保留了下来,这才使我们比较有把握地复原他所说的“另一种方式”。

事实上,这一节从头开始,直到发现四维时空不变量为止的整个内容,完全可以看作是庞加莱在得知洛伦兹1904年特设变换式(1)后,自己头脑中的思考过程。当他写下“洛伦兹群的任一变换,……保持 $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$ 不变的一个线性变换”时,作为数学大家的庞加莱,心里一定完全清楚,整个问题已经解决,剩下的只是一些细节了(具体内容会在下一篇文章中详细给出)。貌似神奇的洛伦兹变换——这个狭义相对论中至关重要的关系式,只不过是 (x, y, z, ict) 这个特殊四维时一空的一个几何性质,它不仅不是电动力学的结果,而且也不

局限于电动力学,它理应被推广到经典力学以及引力等一切其他问题上。这恰恰就是庞加莱在《七月文章》后面章节所做的工作,比如,在历史上首次成功地将电子的牛顿运动方程,推广到我们今天熟知的四维相对论性运动方程(爱因斯坦没能做到),明确提出引力的相互作用以光速传播等重要物理思想。

值得强调,从四维时空的几何学观点来审视洛伦兹变换,能一下子抓住狭义相对论的本质。颇具讽刺意味的是,“相对论”常常被误解成关于“万事万物皆相对”的某种理论;事实恰恰相反,从本质上说,狭义相对论探讨的核心问题是:面对一切相对运动的惯性系,什么才是绝对和不变的东西?用几何学的语言来说就变成:彼此匀速直线运动的惯性系,对应了四维时空中原点重合的坐标轴之间的转动,而这样的坐标轴转动,当然不会改变任一指定时空点到原点的间隔,即 $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2$ 是一个不变量。换句话说,物理上结合了光速不变原理的相对性原理,在数学上就等价于:保持间隔 $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$ 或微分间隔 $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - (cdt)^2$ 不变的四维时空坐标轴转动。在这样的图像下,“用另一种方式产生这个群”其实已经比较清晰,只要将庞加莱在这一节中所写的内容“首尾颠倒”就行了。换句话说,即从数学的四维时空不变量出发,先对 $v/c \ll 1$ 的经典伽利略变换加以改造,然后利用标准的李群无穷小生成元方法,便可干净彻底地导出洛伦兹变换式(3)——这个庞加莱重复抄写并给了公式编号的式子。

正如泡利所说, 19世纪末, 庞加莱与他的同时代人都非常清楚, 麦克斯韦—洛伦兹方程对伽利略变换

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

不协变, 这等于说: 四维时空不变量

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2,$$

只有在 $v=0$ 时才成立(请自行验证)。因此, 对于第一个提出并始终坚持相对性原理的庞加莱而言, 显然伽利略变换必须被改造。在无穷小速度情况下, 伽利略变换应该如何改造, 庞加莱在前面对洛伦兹变换式(1)作 $l=1$, $\delta v/c \ll 1$ 展开时, 实际上已经得到式(2)的答案了。因此, 现在要做的无非是, 从数学上严格证明(而不是直接使用)这个式子。为此, 只要对伽利略变换作如下改造:

$$x' = x - \delta v \cdot t, \quad y' = y, \quad z' = z, \\ t' = t + a \delta v \cdot x,$$

这里 δv 表示无穷小速度, a 是待定系数, 通过四维时空不变量

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2,$$

易证: $a = -1/c^2$, 公式(2)因此得证。因为这里只涉及 x 和 t 而不涉及 y 和 z 的变换, 所以为了书写方便, 我们暂时先用二维形式进行推导, 最后再将 y 和 z 补上。

上述变换用矩阵的方式可以写成

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \left(I - \frac{\delta v}{c} \sigma_1 \right) \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其中

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

从(4)式出发, 累积 N 次同样的无穷小速度变换, 以产生一个有限速度的变换, 以 $\rho = N\delta v/c$ 来标识, 则

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \left(I - \frac{\rho \sigma_1}{N} \right)^N \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix},$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(I - \frac{\rho \sigma_1}{N} \right)^N = \exp(-\rho \sigma_1) \\ = I \cosh \rho - \sigma_1 \sinh \rho.$$

因此, 在有限速度下的洛伦兹变换变成:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \rho & -\sinh \rho \\ -\sinh \rho & \cosh \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}. \quad (5)$$

因为在 $t=t'=0$ 时, 两个坐标轴原点重叠, 所以在不带撇系的 t 时刻, 带撇系的原点在两系中的位置分别是: $x'=0$, $x=vt$, 代入上式, 得

$$0 = vt \cosh \rho - ct \sinh \rho,$$

或

$$\tanh \rho = \frac{v}{c} \equiv \beta.$$

这样

$$\cosh \rho = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \gamma, \quad \sinh \rho = \beta \gamma,$$

最后

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta \gamma \\ -\beta \gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}.$$

上面的数学推导通常被称作“无穷小速度—指数化—生成元技巧”(the infinitesimal velocity-exponentiation-generator technique), 属于物理类本科生数理方法的基本内容^[12]。现在, 若将 $y=y'$ 和 $z=z'$ 补上, 再由 T_0 将变换式从 $l=1$ 推广到 $l \neq 1$ (标度变换), 我们便完整地复原出了庞加莱的“用另一种方式产生这个群”(变换式(3))。这就是庞加莱演绎的一步! 即从四维时空不变量出发, 通过改造无穷小速度下的伽利略变换, 再用无穷小生成元方法, 以数学的优雅干净彻底地导出洛伦兹1904年用特设方式得到的变换式(3)。

至此, 我们解释了庞加莱“不动声色的”两句话中的前一句, 而事实上后一句恐怕才略显庞加莱的大数学家英雄本色, 体现了他对四

维时空不变量和洛伦兹群理解的深度。无论是洛伦兹1892年第一次试图建立惯性系间的时空变换, 还是我们今天的相对论教科书, 基本上都只讨论从 (x, t) 到 (x', t') , 而保持 (y, z) 不变的特殊洛伦兹变换。这对于说明物理图像确实是够了, 但从数学的一般性而言, 显然就不够了。我们还必须考虑两个惯性系以任意相对速度 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ 的情形。具体而言, 考虑在 $t=t'=0$ 时, (x, y, z) 系的三个坐标轴分别与 (x', y', z') 系三个坐标轴完全重叠的两个惯性系, 假如带撇系以速度 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ 相对于不带撇系运动, 那么, 这两个参照系之间的洛伦兹变换应该怎么写呢? 尽管繁琐, 我们还是可以按部就班地证明, 它形式上仍然是类似于(3)式的洛伦兹变换, 只是更加复杂, 因为 (y, z) 都相应变换了。但如果考虑最一般的情况, 即在 $t=t'=0$ 时, (x, y, z) 系与 (x', y', z') 系之间的坐标轴不再重叠而是互成角度, 同时带撇系以速度 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ 相对于不带撇系运动, 那么, 这两个参照系之间的洛伦兹变换又该怎么写呢? 不得不说, 这个问题的复杂性恐怕已超出了绝大多数人的想象, 不说别的, 光是想一下逆变换的相互运动速度 \mathbf{v}' 该怎么写, 或许就够折腾一阵子了, 更别说完整的表达式了。庞加莱“不动声色的”第二句话, 正是用来回答这一问题的, 这若无其事的一句话, 在 C. Moller 的相对论名著 *The Theory of Relativity* 上, 就是整整一节 (§2.4 “最一般的洛伦兹变换”) 的内容。庞加莱的这句话事实上是提醒我们, 洛伦兹变换式(最一般的)与三维空间转动一同(而不是仅有前者, 否

则群元缺了很多!)构成了洛伦兹群,只有基于这样的理解,所谓物理定律在洛伦兹群下协变的含义才真正完备。

最后,庞加莱在这一节余下的部分中,将这个数学上完备的洛伦兹群运用到真实的物理世界中,即取 $l=l(v)$,然后用群论的方法简洁地证明 $l=1$ 。至此,庞加莱演绎的一步完美收官,整个第4节内容也全部结束。

在对庞加莱一举奠定狭义相对论数学结构的《七月文章》第4节做了上述详细介绍之后,当然还应提及一下所有现代大学物理教科书中必不可少的所谓“同时性的相对性”、“时间膨胀”、“长度收缩”这三个几乎成为相对论“标签”的问题。事实上,这对于已经建立狭义相对论四维时空几何图像的庞加莱而言,可以说完全是小儿科的事了。这里先直接给出“干货”,接着再稍加解释。庞加莱在《七月文章》的第3节中明白地(explicitly)给出了“同时性的相对性”的具体表达式,即 $\Delta t=0$ 时,

$$\Delta t' = -\frac{\left(\frac{v}{c^2}\right)\Delta x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \text{ 以及“长度收缩”的具体表达式 } \Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

另外,第6节的公式(4) $\Delta t' = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \Delta t$ 就是“时间膨胀”的具体表达式。

对于 (y, z) 不变,由 (x, t) 变到 (x', t') 这个具体的洛伦兹变换,“同时性的相对性”讲的是,在不带撇系中异地同时发生的两个事件 (x_1, t) 和 (x_2, t) ,在带撇系中则一定不同步发生,也就是说, (x'_1, t'_1) 和

(x'_2, t'_2) 中的 $\Delta t' = t'_2 - t'_1 \neq 0$ 。从相应的二维时空几何来看,这等价于说,对于原点重合、坐标轴也分别重合的两个二维直角坐标系,当带撇系的坐标轴相对于不带撇系的坐标轴,旋转一个角度后,原先在时间轴上投影重合的两个点 (x_1, t) 和 (x_2, t) (因为 $\Delta t=0$),在旋转的坐标系中,这两点 (x'_1, t'_1) 和 (x'_2, t'_2) 的 $\Delta t' \neq 0$,即在时间轴上投影不再重合,这不是太自然了吗?对于1898年就最先意识到异地同时性问题的庞加莱,如果他在《七月文章》中没有明确使用“同时性的相对性”这样的表述,显然不可能是因为他不懂,而只可能是他觉得这实在太显然吧?

4 一点讨论

针对庞加莱《七月文章》第4节内容,笔者想再补充一点讨论。值得指出,在我们用演绎方式推导出洛伦兹变换式(3)的整个过程中,只涉及到光速 c ,而没有涉及作为电磁波的光本身。从这个意义上说,对狭义相对论而言,光的传播速度常数 c ,比作为电磁波的光本身更基本、更重要也更具有普适意义。这一点在上述推导过程中实际上也已经显现出来了,因为当我们从四维时空不变量 $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$ 开始推导时,这里竟然出现了光速,难道不是有点突兀吗?特别是,在无穷小速度下被修改的伽利略变换式(2)中,时间项中也出现了光速 c ,不也不太自然吗?事实上,在引进四维时空不变量 $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$ 时,我们并没必要对这里 C 的性质作任何规定(比如,让它等于光速 c),只要它是一个具有速度量纲的常数就足够了,最后所得的洛伦兹变换,除了 C 与 c 的

差别,其他一模一样。因此可以这样说, C 是与相对性原理捆绑在一起的某个速度上限常数,它可以是电磁现象中光的传播速度 c ;也可以是强相互作用现象中胶子的传播速度;当然,也可以是引力波的传播速度。笔者很难想象,作为大数学家的庞加莱,会不注意到这里提及的速度常数 C 问题,虽然当年与 C 相对应的唯有电磁现象中的光速 c ;相反,很可能的情形是,在注意到 C 或 c 的普适性超出了电磁现象和光本身后,庞加莱才会在得到了洛伦兹群之后,特别是在成功推广牛顿第二定律之后,果断地将洛伦兹群应用于引力问题,并正确地断言引力作用的传播速度为光速,还首次发明了“引力波”这个名词,虽然这距爱因斯坦之后发展的引力波理论还相差甚远。

另外,杨振宁先生在2005年写下《爱因斯坦:机遇与眼光》一文,其中有一段(至少在华人圈中)流传颇广的话:“这就是说,洛伦兹有数学,但没有物理学;庞加莱有哲学,但也没有物理学。正是二十六岁的爱因斯坦质疑人类关于时间的原始观念,坚持同时性是相对的,才能从而打开了通向微观世界的新物理大门。”笔者猜测,杨先生可能没有读过庞加莱《七月文章》的原文,否则恐怕不会下这样的结论,因为杨先生一直是将理论的数学结构之美,置于唯象理论、理论框架之上的^[13]。

5 小结

综上所述,或许我们可以得到这样的结论:假如庞加莱在《六月文章》和《七月文章》的引言中不对历史开第一个“玩笑”,在正文的章节安排上也不开第二个“玩笑”,也

就是说,他若把自己在相对论中最重要、影响最深远、也最能体现他远超洛伦兹的原创贡献,放在文章开头的第1节而不是第4节,同时,假如他没有略去那些数学推导步骤和文字说明,那么,历史或说公正的后代,绝无可能忘记庞加莱在狭义相对论上的开创性和奠基性贡献。

最后,让我们以著名物理学家费曼在《物理定律的特征》^[14]一书中的下面这段话来结束本文,同时点

明下一篇文章《庞加莱的狭义相对论之二:物理定律的对称性》的主题:

“我如此详细地谈论这个具体例子,是因为它开启了物理学定律的对称性研究。正是庞加莱,他提出了可以对方程做什么而使之不变的分析;也正是庞加莱,他主张对物理定律的对称性给予重视。空间平移、时间延迟等对称性并不深刻,但是,沿直线运动之均匀速度的对称性却非常有趣,而且产生了一系

列后果。不止于此,这些后果还可以被拓展到我们未知的定律之中。”

致谢 特别感谢系里的两位同事吴詠时教授和肖江教授,与他们不计其数的面对面及微信讨论让我受益匪浅;非常感谢牛谦、吴飙、胡燦明、石兢、李劲、潘小青等教授对本文初稿提出的宝贵意见。当然,文中的任何错误和疏漏则完全由笔者负责。

参考文献

- [1] Darrigol O. Electrodynamics from Ampère to Einstein. Oxford University Press, 2000
- [2] Logunov A A. Henri Poincaré and Relativity Theory. Nauka, 2005
- [3] Logunov A A. On the Articles by Henri Poincaré 《On the Dynamics of the electron》. Dubna: JINR, 2001
- [4] 通往狭义相对论之路——对 Henri Poincaré 迟到的致敬, <https://dx.doi.org/10.12351/ks.2010.0199>
- [5] Pauli W. Theory of Relativity. Pergamon Press, 1958
- [6] Pauli W. Writing on Physics and Philosophy. Springer-Verlag, 1994
- [7] Œuvres de Henri Poincaré(庞加莱全集). Tome 9, p.489 和 p.494. Gauthier-Villars, 1954
- [8] Lorentz H. Proc. Royal Acad. Amsterdam, 1904, 8: 809
- [9] Lorentz H. Acta Mathematica, 1921, 38: 293
- [10] Schwartz H M. American Journal of Physics, 1971, 39: 1287
- [11] Miller A I. Archive for History of Exact Sciences, 1973, 10(3-5): 261
- [12] Arfken G B, Weber H J. Mathematical Methods for Physicists. 4th edition. Academic Press, 1995
- [13] 杨振宁. 美与物理学. 见: 杨振宁文集. 华东师范大学出版社, 1998
- [14] Feynman R. The Character of Physical Law. The MIT Press, 1985



欧普特科技
GOLDEN WAY SCIENTIFIC

做中国专业的 光学元件与光学仪器系统集成商

TO BE A PROFESSIONAL OPTICAL COMPONENTS AND OPTICAL INSTRUMENTS SYSTEM INTEGRATOR IN CHINA



地址: 北京市朝阳区酒仙桥东路1号M7栋东5层
E/5F M7, NO.1, JIUXIANQIAO EAST ROAD, CHAOYANG DISTRICT, BEIJING
电话: 010-8809 6218 / 8809 6099
邮箱: optics@goldway.com.cn

北京欧普特科技有限公司
Beijing Golden Way Scientific Co., Ltd.

实验室前置放大器

SR570 电流前置放大器

- 1MHz 频率带宽
- 5fA/ $\sqrt{\text{Hz}}$ 输入噪声
- 1pA/V 最大增益
- 电力线或电池操作
- RS-232 电脑接口
- \$3025 (全球通价格)

SR560 电压前置放大器

- 1MHz 频率带宽
- 4nV/ $\sqrt{\text{Hz}}$ 输入噪声
- 1 至 50,000 增益
- 电力线或电池操作
- RS-232 电脑接口
- \$2965 (全球通价格)



SR560电压前置放大器和SR570电流前置放大器遍布于世界各地的研究实验室。两个前置放大器均具有可设置的高通和低通滤波，可充电电池提供长达15小时的无线操作，以及RS-232接口。

除了设置仪器外，其微处理器处于“休眠”状态，无任何数字噪声污染您的低电平模拟信号。

SR560电压前置放大器具有真正的差分（或单端）前端，100M Ω 的输入阻抗和低输入噪声。

SR570电流前置放大器提供高带宽，低漂移和低噪声增益模式。它还具有内置的输入偏置电压和输入失调电流功能。

 **Stanford Research Systems**

Tel: 408-744-9040 · www.thinkSRS.com/products/ps300.html

先锋科技股份有限公司
电话: 86-10-6263-4840
传真: 86-10-8261-8238
Email: sales@teo.com.cn

欧陆科技有限公司
电话: 86-10-6800-8213/16/17
传真: 86-10-6800-8212
Email: euro-tech.bj@euro-tech.com

北京东方科泰科技发展有限公司
电话: 86-10-5129-4988
传真: 86-10-5824-6090
Email: sales@bost-ltd.com