译者的话

物理学史上有一些划时代的论文，学物理的人如果早点读到会大受启发，比如1824年卡诺的(热力学原理)，1834年克拉贝隆的(卡诺循环)，1856年克劳修斯的(熵概念)，1861—1862年麦克斯韦的(电磁学)，1887年玻尔兹曼的(统计力学)，1900年普朗克的(黑体辐射)，1905年爱因斯坦的(运动物体的电动力学)，1928年狄拉克的(相对论量子力学)，1929年外尔的(规范场论)，等等。还有一类，是数学文章，但是能给物理带来划时代的影响。这样的文章，有克莱洛关于曲率的，黎曼关于几何基础的，列维-齐维塔关于联络的，等等。这其中，有一篇是来自一位女性科学家的，即艾米·诺特1918年在菲利克斯·克莱因(Felix Klein，1849—1925)获得博士学位50周年纪念活动上宣读的一篇文章，Invariante Variationsprobleme(不变变分问题)。这篇文章绝对是数理史上划时代的一篇，包含诺特定理，即传说中的对称性与守恒律的对应，此一理论物理的基石。此文一出，理论物理便有了不同的味道与深度。爱因斯坦对此文的评价是，I'm impressed that such things can be understood in such a general way(这种事情还能以这种一般的方式理解，这令我印象深刻)。

诺特(Emmy Noether，1882—1935)，德国女数学家，近世代数的奠基人之一，有抽象代数之母的美誉。其父Max Noether是埃尔朗恩大学的数学教授。艾米少年时并未对数学有明显的兴趣，1900年通过了英语和法语的国家考试，职业定位是到女子中学去做一名教师。1903年，21岁的艾米进入埃尔朗恩大学学习，1907年即获得数学博士学位，导师为代数名家戈尔丹(Paul Gordan，1837—1912)。1909年艾米蒙数学大神克莱因(Felix Klein，1849—1925)和希尔伯特(David Hilbert，1862—1943)召唤入哥廷恩大学，那时她已是differentialinvariant(微分不变量。希尔伯特研究过)领域的大人物了——此时离她进入大学学数学不过短短的6年。1915年6月20日在两位大神的鼎力推动下，艾米通过了Habilitation【译者注：德国的学者升迁制度。有博士学位的申请者凭过去2—3年内独立获得的成果通过该项答辩后，其博士头衔可写为Habil. Dr.，可任私俸讲师，且可以等候教授位置，但必须是其他学校提供的教授位置——这有效地避免了当地学术界黄鼠狼生老鼠的闹剧】，但是向普鲁士教育部申请的法律特许却未获批准，故这次Habilitation无效。此后，艾米作为希尔伯特的助手在哥廷恩大学从事教学和研究活动。1919年，一战后的普鲁士帝国垮台，妇女地位改善，艾米才算通过了Habilitation，成了德国数学史上通过Habilitation的第一位女性。艾米1922年获得一个编外教授职位，但一直没拿到正式教授位置。艾米1933年移居美国，1935年因手术引起并发症去世，享年仅仅53岁。艾米把自己不算长的一生都交给了她热爱的数学事业，终身未婚未恋。

艾米直到1919年一直研究不变理论。艾米的导师戈尔丹曾被称为“Konig der Invarianten (不变之王)”，她在哥廷恩的前辈同事希尔伯特、同辈朋友外尔(Hermann Weyl，1885—1955)都是不变理论的大家。不变量理论，愚以为，是学物理者应该尽早掌握的一门学问。所谓相对论，本质是绝对论，其数学基础就是不变理论。基于贝尔特拉米(Eugenio Beltrami, 1835—1900)不变理论，会明白爱因斯坦广义相对论场方程左侧几何性质的部分——爱因斯坦说那是象牙做的——只有那种选择。笔者今特将艾米·诺特的这篇关于不变理论的划时代文章翻译出来，以供吾国未来之物理学家先睹为快。顺带说一句，读书先认字。欲学数学和物理者，英、德、法、俄语不妨多少掌握一点，对数学和

物理史感兴趣者，可适当再掌握一点希腊、拉丁和阿拉伯语，对数学和物理研究进展感兴趣者，恐怕再懂点日语也是必要的。不认字的学者，不是一般人能做得来的。

艾米的这篇论文正式发表在哥廷恩科学协会通报上，Emmy Noether, Invariante Variationsprobleme (不变变分问题)，Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen，*Mathematisch-Physikalische Klasse*，235-257(1918)；在同一期里，还有艾米的另一篇，Emmy Noether, Invarianten beliebiger Differentialausdrücke (任意微分表达的不变量)，Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, *Mathematisch-Physikalische Klasse*，37-44(1918)；以及Felix Klein的两篇，分别是Felix Klein，Über die Differentialgesetze für Erhaltung von Impuls und Energie in der Einsteinschen Gravitationstheorie，(针对爱因斯坦引力理论中的动量与能量守恒的微分法则)，Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen，*Mathematisch-Physikalische Klasse*，171-189(1918)；Felix Klein, Über die Integralform der Erhaltungsgesetze und die Theorie der räumlich-geschlossenen Welt(守恒律的积分形式和闭合世界理论)，Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, *Mathematisch- Physikalische Klasse*，394-423(1918). 这四篇是同样主题的论文，互相补充，译者以为我们学物理的如果想弄清楚对称与守恒率的问题——这对场论的学习可太重要了——这四篇论文应该一起参详【译者注：有机会我将把这四篇都译出来】。实际上，艾米在这篇文章中提到的**克莱因的第二篇**，指的应是上述守恒律的积分形式这一篇。克莱因这是把守恒律的微分形式、积分形式都讨论了，参考电磁学的积分形式、微分形式以及协变形式，这样全面看问题的方式在中学就该教给我们的年轻人。

不得不说，艾米大姐的德语写作是太差了点——行文显得有点随意，前后不一，而且标点符号极具误导性。与此相对，爱因斯坦的德语就好懂得多。本文有英文译文(M. A. Tavel, Invariant variation problems, *Transport theory and statistical physics* 1(3), 183-207(1971))，但只是字面上随便凑合的(德译英几乎可以逐字对应)而不问数学内容与逻辑上对与不对，比如把Umformung (对方程的改造)也当成了关键词die Transformation (变换) 给译成了transformation；直接将erschöpft译成exhausted，而实际上作者是在强调群的完备性。限于译者的德语与数学水平，本译文错误难免，请读者朋友参照其它文本并基于自己数学的知识认真参详。

关于此篇译文，有几点需要事先澄清。

1) Erster Integral, first integral, 汉译经典力学一般将其译为第一积分。但是，first integral, second integral…是指第一次积分的结果、第二次积分的结果，如果译成第一、第二积分，会让人认为是独立对象的某种排序。反正笔者当年就是这么误解的。笔者此处将之译为一次积分，希望读者会自然想到还有二次积分、三次积分……。

2) 本译文中，das Argument，英文argument，我不知道怎么译，就保留原样了——不知道我国数学家是怎么处理的。对于函数 $y=y(x)$，这个argument x 汉译成函数的变量含含糊糊也就算了。但是对于函数 $\Phi(x-y, x^2+y^2-1)$，变量，variables，是x和y，但是 Φ 的两个arguments分别是$x-y$和 x^2+y^2-1。

3) 关于eigentlicher Energiesatz和uneigentlicher Energiesatz。Eigen，德语，自身的意思，量子力学里有大家熟悉的Eigenwert, Eigenfunktion的说法，英语照写为eigenvalue，eigenfunction，汉译本征值、本征函数。Eigentlich，英译proper，其实proper就是拉丁语的eigen，自己的；improper，非自己的。在相对论中，proper time被汉译为固有时，其实就是运动粒子自己经历的时间，没大毛病。Proper (improper)，汉英字典一般译为(不)恰当的、(不)合适的，确实是不恰当的、不合适的。本文中提及守恒律用eigentlicher，uneigentlicher来修饰，就是强调其是属于所允许的这个群自己的，还是属于所允许的更大的群的。基于此，我将之译为“自己的”和“非自己的”。

不变变分问题

(菲利克斯·克莱因获得博士学位50周年庆典上的致辞)[1]

Emmy Noether 著 曹则贤† 译

2020－03－10收到

† email：zxcao@iphy.ac.cn

DOI：10.7693/wl20200506

年轻的姑娘，你、你真年轻。

——《冰山上的来客》

摘 要 本文探讨一类允许(李群意义上的)连续群的变分问题，由此得出的关于所属微分方程的结论会在第一节中作为定理给出一般性表述，在接下来的几节中予以证明。关于由变分问题引发的微分方程会有比关于任意的、允许群变换的微分方程精确得多的论述，后者构成了当前李分析的内容。本文会用到变分的形式计算同李群方法的结合。对于特殊群与变分问题，这样的方法结合并不是什么新鲜事物，这方面此前有Hamel和Herglotz关于特殊有限群的工作，Lorentz和他的学生(例如Fokker)，以及Weyl和Klein关于特殊无限群的工作[2]。特别地，克莱因的第二篇论文同本文相互影响，关于这一点我提请关注克莱因文章的结论部分。

1 引言与定理表述

下面出现的所有函数应该都假设是解析的或者至少是连续且有限次可微的，且在所考察区间内是单值的。

所谓变换群，指的是这样的变换集合，对于每一个变换，集合内都有一个逆(变换)，且任意两个变换的复合都属于这个集合。群G_ρ是有限连续的，如果它包含的一般变换解析地依赖于ρ个实质性参数ε (这ρ个参数不可以表示为更少参数的ρ个方程)；相应地，群$G_{\infty\rho}$是无限连续的，如果它的一般变换解析地，或者至少是连续且有限次可微地，依赖于ρ个实质性函数$p(x)$及其导数。处于这两种情形之间的，是有无穷多个参数但不依赖任意函数的群。最后，既依赖任意函数又依赖于参数的群，称为混合群[3]。

设有独立变量$x_1,\cdots,x_n$，以及依赖于这些变量的函数$u_1(x),\cdots,u_\mu(x)$。将x和u置于某个群的变换之下，则因为群变换的可逆性，变换得到的也一定包含n个独立的量$y_1,\cdots,y_n$，而其它的则依赖于这些量，可表示为$v_1(y),\cdots,v_\mu(y)$。在变换中，u关于x的导数如$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\cdots$也可能出现[4]。如果关系$P(x,u,\partial u/\partial x,\partial^2 u/\partial x^2\cdots,)=P(y,v,\partial v/\partial y,\partial^2 v/\partial y^2,\cdots)$成立，则此函数称为群的不变量。特别地，若存在关系

$$\begin{aligned}I&=\int\cdots\int f(x,u,\partial u/\partial x,\partial^2 u/\partial x^2\cdots,)\mathrm{d}x\\&=\int\cdots\int f(y,v,\partial v/\partial y,\partial^2 v/\partial y^2,\cdots)\mathrm{d}y\end{aligned}\tag{1}$$

则该积分是群的不变量[5]。这里积分区域为任意实

1) 由菲利克斯·克莱因在1918年7月26日的大会上提交。稿件的最终版本于9月末送达。

2) Hamel: Math. Ann. Bd.59，以及 Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd.50. Herglotz: Ann. D. Phys. (4) Bd. 36, bes. ‡9, S.511. Fokker，Verslag d. Amsterdamer Akad. 27./1.1917. 更多文献请比较1918年6月19日Göttinger Nachrichten上克莱因的第二篇文章。在刚出来的Kneser (Math. Zeitschrift Bd. 2) 的工作中，有用类似方法得到不变量的讨论。

3) Sophus Lie在“无限连续变换群基础”一文(Ber. d. K. Sächs.Ges.der Wissensch. 1891. 后面我引用时会表为“基础”)中定义无限连续群为其变换可通过一个偏微分方程的一般解给出的变换群，只要这些解不仅仅依赖于有限个参数。由此可得到上面所给的与有限群不同的一类；而依赖于无穷多个参数的那种极限情形不是非要用到微分方程系统。

4) 求和时如果可以的话，我会省略指标，比如将$\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\gamma}$简写为$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$之类的【译者注：这可得注意了】。

5) $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$分别是$\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$和$\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n$的缩写。

的x–区间和相应的y–区间[6)]。

另一方面，对任意的、不一定是不变的积分I，可构造其第一阶变分δI，并按照变分计算的规则通过分部积分改写。只要假设δu及其所有出现的导数在边界上为零，其它不做假设，即得人们熟知的结果：

$$\delta I=\int\cdots\int\delta f\,\mathrm{d}x=\int\cdots\int\left(\sum\psi_i(x,u,\partial u/\partial x\cdots)\delta u_i\right)\mathrm{d}x \quad (2)$$

其中ψ是拉格朗日表达式，即相关变分问题$\delta I=0$之拉格朗日方程的左侧。对应这个积分关系的是一个无需积分表示的关于δu及其导数的恒等式，是将边界项都写出来而得到的。如分部积分所表明的那样，这些边界项是关于散度，即表达式$\mathrm{Div}A=\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial A_n}{\partial x_n}$，的积分，其中$A$是$\delta u$及其导数的线性函数。由此得

$$\sum\psi_i\delta u_i=\delta f+\mathrm{Div}A \quad (3)$$

若f只包含u的一阶导数，在一重积分的情形下恒等式(3)等同于Heun所谓的“拉格朗日中心方程”

$$\sum\psi_i\delta u_i=\delta f-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum\frac{\partial f}{\partial u_i'}\delta u_i\right),\ \left(u_i'=\mathrm{d}u_i/\mathrm{d}x\right) \quad (4)$$

在n–重积分情形下，(3)式变为

$$\sum\psi_i\delta u_i=\delta f-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum\frac{\partial f}{\partial(\partial u_i/\partial x_1)}\delta u_i\right)-\cdots-\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\sum\frac{\partial f}{\partial(\partial u_i/\partial x_n)}\delta u_i\right) \quad (5)$$

而在一重积分和u的k–阶导数的情形下，(3)式变为

$$\sum\psi_i\delta u_i=\delta f-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(\sum\binom{1}{1}\frac{\partial f}{\partial u_i^{(1)}}\delta u_i+\binom{2}{1}\frac{\partial f}{\partial u_i^{(2)}}\delta u_i^{(1)}+\cdots+\binom{k}{1}\frac{\partial f}{\partial u_i^{(k)}}\delta u_i^{(k-1)}\right)\right)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\left(\sum\binom{2}{2}\frac{\partial f}{\partial u_i^{(2)}}\delta u_i+\binom{3}{2}\frac{\partial f}{\partial u_i^{(3)}}\delta u_i^{(1)}+\cdots+\binom{k}{2}\frac{\partial f}{\partial u_i^{(k)}}\delta u_i^{(k-2)}\right)\right)+\cdots+(-1)^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\sum\binom{k}{k}\frac{\partial f}{\partial u_i^{(k)}}\delta u_i\right) \quad (6)$$

以及在n–重积分情形下也有一个恒等式成立。A包含δu直到$(k-1)$–阶的导数。拉格朗日表达ψ_i可通过(4)，(5)，(6)式定义的事实，是因为右式中δu的高阶导数可以通过合并消除掉，而另一方面关系式(2)得到满足，经分部积分就显然能得到上述结果。

接下来讨论两个定理：

定理I. 若积分I针对群G_ρ是不变的，则朗格朗日表达的ρ–个线性独立组合是散度；反过来，由此可以得出I针对群G_ρ不变的结论。此定理针对有无穷多参数的极限情形下也成立。

定理II. 如果积分I针对群$G_{\infty\rho}$是不变的，其中任意函数最多出现到σ–阶导数，则在诸拉格朗日表达式以及σ–阶导数之间存在ρ–个恒等式。逆定理也成立[7)]。

对于混合群，两个定理里的论断都成立，既出现依赖关系，也出现不依赖于其的散度关系【译者注：原文这句话确实很含糊。不是谁都会用母语写论文的】。

从这些恒等式转到其所属的变分问题，令$\psi=0$[8)]，则在一维情形——此处散度成了全微分——定理I断言存在ρ–个一次积分，它们之间可能存在非线性依赖关系[9)]。在多维情形，可以得到近来经常被称为“守恒律”的散度方程；定理II断言，拉格朗日表达中的ρ–个是其它拉格朗日表达的结果。

威尔斯特拉斯的参数表达提供了定理II——不论其逆表述——的最简单例子。这里的积分因一阶齐次性，当把自变量x用任意的x的函数替代而u不变时($y=p(x)$，$v_i(y)=u_i(x)$)，是不变的。任意的函数出现，但其导数不出现；与此对应的是著名拉格朗日表达式之间的线性关系：$\sum\psi_i\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}x}=0$。再一个例子是物理学家的广义相对论，涉及的是

6) 所有在变换中出现的Argumente如x, u, ε, $p(x)$都当作是实的，而系数应该是复数。因为结果是关于x, u, 参数和任意函数的恒等式，只要出现的函数是解析的，这些结果对复数也成立。一大部分结果不是建立在积分之上的，这里限制在实数情形在论证时不是必要的。与此相反，第2节结尾和第5节开始部分的论证是必须依赖积分形式的。

7) 关于某些平凡的例外情形，请比较第2节的第2条说明。

8) 某种意义上更一般地可以令$\psi_i=T_i$。比较第3节的第一条说明。

9) 试比较第3节的结论。

所有的变换 $x:y_i=p_i(x)$ 的群，与此同时，u(记为 $g_{\mu\nu}$ 和 q)会被置于由此针对一个二次型线性微分形式之系数所诱导的变换——此变换含有任意函数 $p(x)$ 的一阶导数——之下。相应地有 n 个关于诸拉格朗日表达及其一阶导数的依赖关系[10]。

将群特别化，使得变换中不含 $u(x)$ 的导数，此外变换后的自变量只依赖于 x 而不依赖于 u，则只要将参数置于合适的变换之下，(如第5节所表明的那样)由 I 的不变性可得到 $\sum\psi_i\delta u_i$ 的相对不变性[11]以及在定理I出现的散度。进一步地可知，前述的一次积分也允许这个群。对于定理II，也有通过任意函数攒到一起的依赖关系的左侧(表达式)之相对不变性，且由此还有一个函数，其散度恒为零且允许该群。该函数在物理学家的相对论中建立起了依赖关系与能量定律之间的联系[12]。最后，定理II还给出了与本文有关的希尔伯特关于广义相对论的“自己的(eigentlicher)”能量守恒律不成立的论述之群论形式证。借助这些补充说明，定理I包含所有力学中有名的关于一次积分的定理，而定理II可看作是关于广义相对论之最大限度的群论意义的推广。

2 散度关系与依赖关系

设 G 是有限的或者无限的连续群；让恒等变换总对应参数 ε 以及任意函数 $p(x)$ 的0值[13]。一般形式的变换总可取如下形式：

$$y_i=A_i(x,u,\partial u/\partial x,\cdots)=x_i+\Delta x_i+\cdots$$

$$v_i(y)=B_i(x,u,\partial u/\partial x,\cdots)=u_i+\Delta u_i+\cdots$$

这里的 Δx_i，Δu_i 意味着是 ε，以及 $p(x)$ 及其导数，的最低次幂项，其实应该假设是线性的。以后会表明，这不会对一般性带来限制。

现在，假设积分 I 是针对群 G 的不变量，满足关系式(1)。特别地，I 也是针对群 G 所包含的无穷小变换 $y_i=x_i+\Delta x_i$；$v_i(y)=u_i+\Delta u_i$ 是不变的，故此关系式(1)变为

$$0=\Delta I=\int\cdots\int f(y,v,\partial v/\partial y,\cdots)\mathrm{d}y-\int\cdots\int f(x,u,\partial u/\partial x,\cdots)\mathrm{d}x \qquad (7)$$

其中第一个积分应从 x-区间扩展到相应的 $x+\Delta x$-区间上。这个积分，也可以借助对无穷小 Δx 成立的形式改造

$$\int\cdots\int f(y,v(y),\partial v/\partial y,\cdots)\mathrm{d}y=\int\cdots\int f(x,v(x),\partial v/\partial x,\cdots)\mathrm{d}x+\int\cdots\int \mathrm{Div}(f\cdot\Delta x)\mathrm{d}x \qquad (8)$$

将之转化成一个在 x-区间上的积分。针对无穷小变换 Δu 引入变分

$$\bar{\delta}u_i=v_i(x)-u_i(x)=\Delta u_i-\sum\frac{\partial u_i}{\partial x_\lambda}\Delta x_\lambda \qquad (9)$$

则由(7)式和(8)式导出

$$0=\int\{\bar{\delta}f+\mathrm{Div}(f\cdot\Delta x)\}\mathrm{d}x. \qquad (10)$$

右侧恰是关于自变量和因变量同时变分的著名公式。因为积分(10)式对任意区间都满足，故积分核必为零，关于 I 之不变性的李微分方程变为关系式

$$\bar{\delta}f+\mathrm{Div}(f\cdot\Delta x)=0 \qquad (11)$$

根据(3)式将 $\bar{\delta}f$ 用拉格朗日表达式加以表达，则得

$$\sum\psi_i\bar{\delta}u_i=\mathrm{Div}B,\ (B=A-f\cdot\Delta x) \qquad (12)$$

这个关系对每一个不变积分 I 代表一个关于所有argument的恒等式，这就是要找寻的关于 I 的李微分方程的形式[14]。

现在首先假设 G 是有限连续群 G_ρ；根据 Δu，Δx 是参数 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_\rho$ 线性函数的假设，则根据(9)式这对 $\bar{\delta}u$ 及其导数也成立，由此 A 和 B 关于 ε 也是线性的。我接着取

$$B=B^{(1)}\varepsilon_1+\cdots+B^{(\rho)}\varepsilon_\rho;\ \bar{\delta}u=\bar{\delta}u^{(1)}\varepsilon_1+\cdots+\bar{\delta}u^{(\rho)}\varepsilon_\rho$$

---

10) 可比较克莱因的表述。

11) 意思是 $\sum\psi_i\delta u_i$ 经变换后多了个因子。

12) 比较克莱因(在同期杂志里)的第二篇文章。

13) 比较Lie“基础”一文的第331页。对于任意函数，参数的特定值 a^σ 用固定函数 p^σ，$\partial p^\sigma/\partial x$，…代替；相应地，值 $a^\sigma+\varepsilon$ 用 $p^\sigma+p(x)$，$\partial(p^\sigma+p)/\partial x$，…代替。

14) (12)式在平凡情形变成0=0——这只出现在 Δx，Δu 也依赖于 u 的导数的情形——此时 $\mathrm{Div}(f\cdot\Delta x)=0$，$\bar{\delta}u=0$；这个无穷小变换总是要从群中剔除的；只有剩下的参数或者任意函数的数目在定理的表述上才算数。至于剩下的变换是否还能构成群，这说不好。

其中 $\bar{\delta}u^{(1)},\cdots$ 是 x，u，$\partial u/\partial x$，$\cdots$的函数；于是自(12)式得到欲找寻的散度关系

$$\sum\psi_i\bar{\delta}u_i^{(1)}=\mathrm{Div}B^{(1)};\cdots\sum\psi_i\bar{\delta}u_i^{(\rho)}=\mathrm{Div}B^{(\rho)}\quad(13)$$

这将有 $\rho-$ 个拉格朗日表达式线性独立组合的散度；其线性独立的性质可如下得出：由 $\bar{\delta}u=0$，$\Delta x=0$，根据(9)式，也就有 $\Delta u=0$，$\Delta x=0$，也就有无穷小变换之间的依赖性关系。这样的(依赖关系)不过根据前提可没有参数值能满足，因为否则自无穷小变换通过积分再发生的群 G_ρ 依赖于少于 $\rho-$ 个实质性参数。其它的可能性，$\bar{\delta}u=0$，$\mathrm{Div}(f\Delta x)=0$，也排除了。这些结论在无穷多参数的极限情形也是成立的。

现在首先假设 G 是无限连续群 $G_{\infty\rho}$；则 $\bar{\delta}u$ 及其导数，还有 B，关于任意函数 $p(x)$ 及其导数是线性的[15)]；代入 $\bar{\delta}u$ 的值，且不依赖于式(12)，有

$$\sum\psi_i\bar{\delta}u_i=\sum_{\lambda,i}\psi_i\{a_i^{(\lambda)}(x,u,\cdots)p^{(\lambda)}(x)+$$
$$b_i^{(\lambda)}(x,u,\cdots)\frac{\partial p^{(\lambda)}}{\partial x}+\cdots+c_i^{(\lambda)}(x,u,\cdots)\frac{\partial^\sigma p^{(\lambda)}}{\partial x^\sigma}\}.$$

现在，仿从分部积分得到恒等式的公式，

$$\varphi(x,u,\cdots)\frac{\partial^\tau p(x)}{\partial x^\tau}=(-1)^\tau\frac{\partial^\tau\varphi}{\partial x^\tau}\cdot p(x)\ \ \mathrm{mod.\ Div}$$

【译者注：即关于散度的余式】

将 p 的导数用 p 自身和散度(其关于 p 及其导数是线性的)来替代，则得到

$$\sum\psi_i\bar{\delta}u_i=\sum_{\lambda}\{(a_i^{(\lambda)}\psi_i)-\frac{\partial}{\partial x}(b_i^{(\lambda)}\psi_i)+\cdots$$
$$+(-1)^\sigma\frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma}(c_i^{(\lambda)}\psi_i)\}p^{(\lambda)}+\mathrm{Div}(\Gamma)\quad(14)$$

【译者注：这个 δ 上面是否有一杠呢？Noether的两种版本原文都没有，但英译者给加上了，应该有。Noether原文下面两式中求和号的指标也没有了！(−1)幂指数的位置也错了】结合(12)式，得

$$\sum\{(a_i^{(\lambda)}\psi_i)-\frac{\partial}{\partial x}(b_i^{(\lambda)}\psi_i)+\cdots$$
$$+(-1)^\sigma\frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma}(c_i^{(\lambda)}\psi_i)\}p^{(\lambda)}=\mathrm{Div}(B-\Gamma)\quad(15)$$

现在我来构造关于(15)式的 n−重积分，扩展到任何区间；这样选择 $p(x)$，其及其在 $(B-\Gamma)$ 中出现的导数在边界上都为零。因为这关于散度的积分约化为边界积分，(15)式左侧针对任意的、但在边界上其连同足够多的导数为零的函数 $p(x)$ 做相应的积分也为零。根据针对任意 $p(x)$ 积分都为零的著名结论，可得 $\rho-$ 个关系

$$\sum\{(a_i^{(\lambda)}\psi_i)-\frac{\partial}{\partial x}(b_i^{(\lambda)}\psi_i)+\cdots+(-1)^\sigma\frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma}(c_i^{(\lambda)}\psi_i)\}$$
$$=0,\ \lambda=1,2\cdots\rho\quad.\quad(16)$$

这就是就 I 针对群 $G_{\infty\rho}$ 不变性问题所要找寻的诸拉格朗日表达式及其导数之间的依赖关系。线性无关性如上所示，因为逆命题重新导回(12)式，又因为可从无穷小变换重又回归到有限群情形，关于这一点在第4节会详细解释。据此，在群为 $G_{\infty\rho}$ 的情形，在无穷小变换中总有 $\rho-$ 个任意变换。从(15)和(16)式可得 $\mathrm{Div}(B-\Gamma)=0$。

相对于混合群，令 Δx 和 Δu 是关于参数 ε 和函数 $p(x)$ 线性的，因为既要令 ε 为零，又要令 $p(x)$ 为零，则既有(13)式那样的散度关系，也有(16)式那样的依赖关系。

3 有限群情形的逆命题

为了阐述逆命题，先把前述思考倒过来梳理一遍。(13)式乘上 ε 然后加上(12)式，利用(3)式，得到关系式 $\bar{\delta}f+\mathrm{Div}(A-B)=0$。令 $\Delta x=\frac{1}{f}(A-B)$，由此得到(11)式，然后积分得到(7)式 $\Delta I=0$，即针对由 Δx，Δu——其中 Δu 借助(9)式由 Δx 和 $\bar{\delta}u$ 所决定，Δx 和 Δu 关于参数是线性的——所确定之变换的 I 的不变性。$\Delta I=0$ 以一种熟知的方式得自 I 针对如下有限变换的不变性，该有限变换来自积分联立系统：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\Delta x,\ \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=\Delta u_i;\ (\text{对于}\,t=0,\ x_i=y,u_i=v_i)\quad(17)$$

这些有限变换包含 $\rho-$ 个参数 $a_1\cdots a_\rho$，即 $t\varepsilon_1\cdots t\varepsilon_\rho$ 的组合。假设有且只有 $\rho-$ 个线性独立散度关系(13)式，则进一步可得，那些有限变换，只要其不包含导数 $\partial u/\partial x$，总是构成群。在相反的情形至少有一个通过李括号得到的无穷小变换不是其余 $\rho-$ 个的线性组合，因为 I 也允许这样的变换，则会有多于 $\rho-$ 个的线性独立散度关系。或者，

15) 逆命题表明，假设 p 不依赖 u，$\partial u/\partial x$ $\cdots$ 不会带来限制。

若这些无穷小变换取 $\bar{\delta}u=0$，$\mathrm{Div}(f\Delta x)=0$ 的特殊形式，但 Δx 与 Δu 会包含导数，这与假设前提相矛盾。Δx 与 Δu 包含导数时是否会发生这种情况，这个目前还不明朗，但前面得到的 Δx 还得加上使得 $\mathrm{Div}(f\Delta x)=0$ 的函数 Δx，以便重获群的性质。不过，由此添加的参数按照约定不计入。逆命题得证。

由此逆命题可见，事实上 Δx 与 Δu 应假设关于参数是线性的。若 Δu 与 Δx 是关于 ε 高阶项的形式，则因为对 ε 之幂的线性独立关系会得到完全对应(13)式的关系，只是数目多一些。由其根据逆命题可得针对某个群的 I 的不变性，该群的无穷小变换关于参数是线性的。若该群精确地包含 ρ-个参数，则在原来通过 ε 的高次幂项得以保持的散度关系之间存在线性相关性。

值得注意的是，若 Δx 与 Δu 也包含 u 的导数，有限变换可能依赖于 u 的无穷多导数；在这种情形下，因为(17)式积分在确定 $\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2}$，$\frac{\mathrm{d}^2u_i}{\mathrm{d}t^2}$ 时导向 $\Delta(\frac{\partial u}{\partial x_k})=\frac{\partial\Delta u}{\partial x_k}-\sum_\lambda\frac{\partial u}{\partial x_\lambda}\frac{\partial\Delta x_\lambda}{\partial x_k}$，结果一般来说每一步都会带来 u 的导数数目的增加。如下即为一例：

$$f=\frac{1}{2}u'^2;\quad \psi=-u'';\quad \psi\cdot x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u-u'x);$$

$$\bar{\delta}u=x\cdot\varepsilon;\quad \Delta x=\frac{-2u}{u'^2}\varepsilon;\quad \Delta u=(x-\frac{2u}{u'})\varepsilon$$

因为散度的拉格朗日表达式恒为零，最后逆定理断言如下结果：若 I 允许群 G_ρ，则每一个同 I 只差一个边界积分，即关于一个散度的积分，的积分也允许拥有同样 $\bar{\delta}u$ 的、其无穷小变换一般会包含 u 的导数的群 G_ρ。对应上面的例子，$f^*=\frac{1}{2}\left\{u'^2-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u^2}{x}\right)\right\}$ 允许无穷小变换 $\Delta u=x\varepsilon$，$\Delta x=0$；而对应 f 的无穷小变换里出现了 u 的导数。

回到变分问题，即令 $\psi_i=0$ [16]，则(13)式变为方程 $\mathrm{Div}B^{(1)}=0$，…，$\mathrm{Div}B^{(\rho)}=0$，这些方程经常被称为守恒律。在一维情形，可得 $B^{(1)}=\mathrm{const.}$，…，$B^{(\rho)}=\mathrm{const.}$，依据(6)式，只要 Δu 与 Δx 不含有高于 f 中出现的 k-阶导数，则 B 最多包含 u 的 $(2k-1)$ 阶导数。因为 ψ 中一般地出现 $2k$ 阶导数，所以存在 ρ-个一次积分 [17]。前述的 f 再次表明，在这些(一次积分)之间存在非线性依赖关系。对应线性不相关的 $\Delta u=\varepsilon_1$ 与 $\Delta x=\varepsilon_2$ 是线性不相关关系 $u''=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u'$；$u''\cdot u'=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u'^2$，与此同时在一次积分 $u'=\mathrm{const.}$，$u'^2=\mathrm{const.}$ 之间存在非线性依赖关系。此处处理的是 Δu 与 Δx 不包含 u 的导数的基本情形 [18]。

4 无穷群情形的逆命题

首先已表明，关于 Δx 与 Δu 的线性假设不构成限制，这是未提逆命题就从如下的事实，即群 $G_{\infty\rho}$ 形式上只依赖于 ρ-个任意函数，得出的结论。在非线性情形，变换的复合过程中最低阶项会相加，任意函数的数目会增多。事实上，假设

$$y=A(x,u,\partial u/\partial x,\cdots;p)=x+\sum a(x,u,\cdots)p^\nu$$
$$+b(x,u,\cdots)p^{\nu-1}\frac{\partial p}{\partial x}+cp^{\nu-2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2+\cdots$$
$$+d\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^\nu+\cdots\ (p^\nu=(p^{(1)})^{\nu_1}\cdots(p^{(\rho)})^{\nu_\rho}),$$

以及相应地有 $v=B(x,u,\partial u/\partial x,\cdots;p)$，则通过与 $z=A(y,v,\partial v/\partial y,\cdots;q)$ 的复合，对于最低阶项，得到

$$z=x+\sum a(p^\nu+q^\nu)+b(p^{\nu-1}\frac{\partial p}{\partial x}+q^{\nu-1}\frac{\partial q}{\partial x})$$
$$+c(p^{\nu-2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2+q^{\nu-2}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2)+\cdots$$

这里任一个与 a，b 不同的系数若不为零，则会出现一项 $p^{\nu-\sigma}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^\sigma+q^{\nu-\sigma}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^\sigma$，$\sigma>1$，这就不能写成某单个函数的微分商或者微分商的幂积；任意函数的数目增加了，这与假设相抵触。若所有与 a，b 不同的系数为零，则(一如群 $G_{\infty1}$ 的情形)各

16) $\psi_i=0$ 或者一般地 $\psi_i=T_i$，T_i 是新引入的方程，在物理学里称为场方程。在 $\psi_i=T_i$ 的情形，(13)式变为方程 $\mathrm{Div}B^{(\lambda)}=\sum T_i\delta u_i^{(\lambda)}$，这在物理中依然被称为守恒律。

17) 只要 f 关于 k-阶导数是非线性的【译者注：没懂】。

18) 否则还有对任意 λ 的 $u'^\lambda=\mathrm{const.}$，对应 $u''\cdot(u')^{\lambda-1}=\frac{1}{\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u')^\lambda$。

按指数 $v_1\cdots v_\rho$ 的值第二项会是第一项的微分商，事实上会出现线性关系；或者这里任意函数的数目也增加。因为 $p(x)$ 的线性，无穷小变换满足一个线性偏微分方程组；且因为群的性质是满足了的，其根据李的定义构成了一个“无穷小变换的无限群”(参见李“基础”一文第10节)。

逆定理可以有限群类似的方式得到。(16)式那样的依赖关系成立，通过与 $p^{(\lambda)}(x)$ 乘积而后相加，利用(14)式的调整，导向了 $\sum\psi_i\bar{\delta}u_i=\mathrm{Div}(\Gamma)$ 。如在第3节那样，这又能导向 Δx 与 Δu 的确立以及 I 针对无穷小变换的不变性，那些变换确实线性地依赖于 ρ－个函数及其到 σ－阶的导数。这些无穷小变换——若不包含导数 $\partial u/\partial x$ ——肯定构成一个群的结论，可如第3节中那样得到，否则通过更多复合会出现更多的任意函数，而根据假设只应该有 ρ－个依赖关系(16)式出现；这些无穷小变换构成一个“无穷小变换的无限群”。这样的群可由某个李的“有限变换的无限群”意义下定义的最一般的无穷小变换构成(参见李“基础”一文定理VII，第391页)。每一个有限变换都会自无穷小变换通过对如下的联立系统 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\Delta x_i$ ， $\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=\Delta u_i$ (对于 t=0, $x_i=y$, $u_i=v_i$)积分产生出来(参见李“基础”一文第7节)[19]。此过程可能需要假设任意函数 $p(x)$ 依赖于 t。群 G 确实依赖于 ρ－个任何函数。若特别地假设 $p(x)$ 不依赖于 t。则这个依赖可解析地通过任意函数 $q(x)=t\cdot p(x)$ 表现[20]。若导数 $\partial u/\partial x$ 出现，在得出同样结论之前可能需要添加无穷小变换 $\bar{\delta}u=0$ ， $\mathrm{Div}(f\Delta x)=0$ 。

接着李的例子(参见李“基础”一文第7节)不妨提及一个一般情形，可以一直进展到显示表达，其同时表明，任意函数的导出出现到 σ－阶。我指的是这样的无穷小变换的集合，对应所有 x－变换以及由此诱导的 u 变换的群。所谓诱导的 u 变换， Δu ，因此 u，只依赖于 Δx 中出现的任意函数。此外还假设，导数 $\partial u/\partial x,\cdots$ 在 Δu 中不出现。这样， $\Delta x_i=p^{(i)}(x)$;

$$\Delta u_i=\sum_{\lambda=1\cdots n}\left\{a^{(\lambda)}(x,u)p^{(\lambda)}+b^{(\lambda)}\frac{\partial p^{(\lambda)}}{\partial x}+\cdots+c^{(\lambda)}\frac{\partial^\sigma p^{(\lambda)}}{\partial x^\sigma}\right\}。$$

因为无穷小变换 $\Delta x=p(x)$ 产生每一个 $x=y+g(y)$ ，其中 $g(y)$ 是任意函数，这样的变换，可以特意这样安排 $p(x)$ 对 t 的依赖，其能产生单成员【译者注：依赖于单个参数的?】群

$$x_i=y_i+t\cdot g_i(y) \tag{18}$$

其在 t=0时变为单位元而在 t=1时过渡到所找寻的 $x=y+g(y)$ 。微分(18)式，得

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=g_i(y)=p^{(i)}(x,t) \tag{19}$$

其中 $p(x,t)$ 自 $g(y)$ 由(18)式倒推出来。反过来，借助辅助条件 t=0时 $x_i=y_i$ ——借此可以确立积分——由(19)式可得到(18)式。借助(18)式，在 Δu 中 x 可由“积分常数” y 和 t 替代， $g(y)$ 精确地只出现到 σ－阶导数，此过程中需将 $\frac{\partial p}{\partial x}=\sum\frac{\partial g}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x}$ 里的 $\frac{\partial y}{\partial x}$ 用 $\frac{\partial x}{\partial y}$ 表达，一般地 $\frac{\partial^\sigma p}{\partial x^\sigma}$ 用其在 $\frac{\partial g}{\partial y},\cdots,\frac{\partial x}{\partial y},\cdots\frac{\partial^\sigma x}{\partial y^\sigma}$ 中的值来代替【译者注：不明白这个durch seinen Wert in 中的Wert，值，是哪来的】。为了确定 u，还得到方程组

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=F_i(g(y),\frac{\partial g}{\partial y},\cdots\frac{\partial^\sigma g}{\partial y^\sigma},u,t),\ (t=0时u_i=v_i)$$

其中只有 t 和 u 是变量，而 $g(y),\cdots$ 属于系数范围，这样积分得

$$u_i=v_i+B_i(v,g\ (y),\frac{\partial g}{\partial y},\cdots\frac{\partial^\sigma g}{\partial y^\sigma},t)\Big|_{t=1}$$

其是精确地依赖于任意函数直到其 σ－阶导数的变换。根据(18)式，恒等式存在其中 $g(y)=0$ 的情形；群的性质源于所用程序提供每一个变换 $x=y+g(y)$ ，其能确定 u 的诱导变换，群 G(的元素)得以齐备。

由逆定理捎带着还给出，假设任意函数只依赖于 x 而不依赖于 $u,\frac{\partial u}{\partial x},\cdots$ 并不构成限制。实际上

19) 特别地可得到结论，那个由群 $G_{\infty\rho}$ 之无穷小变换 Δx ，Δu 所产生的群 G 可以回到 $G_{\infty\rho}$ 。因为 $G_{\infty\rho}$ 不包含不同于 Δx ，Δu 而依赖于任意函数的无穷小变换，也不可能包含不依赖(函数)的、但依赖参数的无穷小变换，否则那就是混合群了。根据前述内容，无穷小变换决定的是有限群。

20) 是否总是出现这种情形的问题，已由李另行表述了(参见李“基础”一文第7、13节)。

在后一种情形，在改写的(14)式，以及(15)式，中除了 $p^{(\lambda)}$ 以外还出现 $\frac{\partial p^{(\lambda)}}{\partial u}, \frac{\partial p^{(\lambda)}}{\partial(\partial u/\partial x)}, \cdots$。假设 $p^{(\lambda)}$ 逐次地是 $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \cdots$ 的0，1，…次幂，系数是 x 的任意函数，则又出现依赖关系(16)，只是数目更多。按照上面的逆定理，这些依赖关系通过同只依赖于 x 的函数的复合又回到此前的情形。同样可以表明，混合群对应依赖关系和与其不相关的散度关系的同时出现[21]。

5 关系之单独组件的不变性

将群 R 限制在最简单的、常处理的情形，即在变换中不允许 u 的导数出现，变换的独立变量只依赖于 x 而不依赖于 u，这样可以得到公式之单个构件的不变性。首先是根据熟知的结论得到的 $\int\cdots\int\left(\sum\psi_i\delta u_i\right)dx$，还有 $\sum\psi_i\delta u_i$ 的相对不变性[22]，这里的 δ 可以理解为任何变分。一方面有

$$\delta I=\int\cdots\int\delta f\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x},\cdots\right)\mathrm{d}x=\int\cdots\int\delta f\left(y,v,\frac{\partial v}{\partial y},\cdots\right)\mathrm{d}y,$$

另一方面对于在边界为零的 δu，$\delta\frac{\partial u}{\partial x}, \cdots$，因为 $\delta u, \delta\frac{\partial u}{\partial x}, \cdots$ 的线性齐次变换，也对应在边界上为零的 $\delta v, \delta\frac{\partial v}{\partial y}, \cdots$

$$\int\cdots\int\delta f\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x},\cdots\right)\mathrm{d}x=\int\cdots\int\left(\sum\psi_i(u,\cdots)\delta u_i\right)\mathrm{d}x;$$

$$\int\cdots\int\delta f\left(y,v,\frac{\partial v}{\partial x},\cdots\right)\mathrm{d}y=\int\cdots\int\left(\sum\psi_i(v,\cdots)\delta v_i\right)\mathrm{d}y.$$

因为在边界上为零的 δu，$\delta\frac{\partial u}{\partial x}, \cdots$，有

$$\int\cdots\int\left(\sum\psi_i(u,\cdots)\delta u_i\right)\mathrm{d}x=\int\cdots\int\left(\sum\psi_i(v,\cdots)\delta v_i\right)\mathrm{d}y$$
$$=\int\cdots\int\left(\sum\psi_i(v,\cdots)\delta v_i\right)\left|\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right|\mathrm{d}x$$

在第三个积分中把 $y, v, \delta v$ 用 $x, u, \delta u$ 表达出来，令其与第一个积分相等，得到关系式 $\int\cdots\int\left(\sum\chi_i(u,\cdots)\delta u_i\right)\mathrm{d}x=0$ 对于在边界上为零但没有其它要求的 δu 成立，由此得到著名的对任意 δu 积分核为零的结果。关于 δu 的恒等关系为 $\sum\psi_i(u,\cdots)\delta u_i=\left|\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right|\left(\sum\psi_i(v,\cdots)\delta v_i\right)$，这些表明了 $\sum\psi_i(u,\cdots)\delta u_i$ 的相对不变性和 $\int\left(\sum\psi_i(u,\cdots)\delta u_i\right)\mathrm{d}x$ 的不变性[23]。

为了将此应用到导出的散度关系和依赖性关系，首先要证明，由 Δu，Δx 导出的 $\bar{\delta}u$ 事实上满足针对变分 δu 的变换规则，只要参数以及 $\bar{\delta}v$

---

21) 如同在第3节，此处由逆定理也可得到，除了 I，任何同 I 只差一个散度积分的积分 I^* 同样允许一个无限群，其具有相同的 $\bar{\delta}u$，但一般地 Δx，Δu 包含 u 的导数。爱因斯坦在广义相对论中为了得到一个能量守恒的简单表述而引入过一个这样的积分 I^*。我给出这个 I^* 允许的无穷小变换，为此我使用克莱因在其第二篇文中采用的记号。积分 $I=\int K\mathrm{d}\omega=\int R\mathrm{d}S$ 允许所有 ω 的变换，以及关于 $g_{\mu\nu}$ 的诱导变换，的群，相应的依赖关系(克莱因文中的(30)式)：$\sum R_{\mu\nu}g_\tau^{\mu\nu}+2\sum\frac{\partial g^{\mu\nu}R_{\mu\tau}}{\partial\omega^\sigma}=0$。则有 $I=\int R^*\mathrm{d}S$，$R^*=R+\mathrm{Div}$，由此有 $R_{\mu\nu}^*=R_{\mu\nu}$ 分别是拉格朗日表达式。所给的依赖关系也是关于 $R_{\mu\nu}^*$ 的。乘上 p^τ 后相加，则通过乘积微分的改写，反过来得 $\sum R_{\mu\nu}p^{\mu\nu}+2\,\mathrm{Div}\sum g^{\mu\sigma}R_{\mu\tau}p^\tau=0$，$\delta R^*+\mathrm{Div}(\sum 2g^{\mu\sigma}R_{\mu\tau}p^\tau-\frac{\partial R^*}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}}p^{\mu\nu})=0$。比较李的微分方程 $\delta R^*+\mathrm{Div}(R^*\Delta\omega)=0$，得到 I^* 允许的无穷小变换 $\Delta\omega^\sigma=\frac{1}{R^*}(\sum 2g^{\mu\sigma}R_{\mu\tau}p^\tau-\frac{\partial R^*}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}}p^{\mu\nu})$；$\Delta g^{\mu\nu}=p^{\mu\nu}+\sum g_\sigma^{\mu\nu}\Delta\omega^\sigma$。这些无穷小变换依赖于 $g^{\mu\nu}$ 的一阶和二阶微分，包含任何 p 函数至一阶导数。

22) 这意思是 $\sum\psi_i\delta u_i$ 经变换后获得一个因子，这在代数不变理论中一直被称为相对不变性。

23) 若 y 也依赖于 u，这些结论不成立，因为 $\delta f(y,v,\partial v/\partial y,\cdots)$ 也包含 $\sum\frac{\partial f}{\partial y}\delta y$。散度项的改造并不能导向拉格朗日表达式。允许包含 u 的导数也一样。因为这样 δv 作为 δu，$\delta\frac{\partial u}{\partial x}, \cdots$ 的线性组合首先经过散度形式的改写导向恒等式 $\int\cdots\int\left(\sum\chi_i(u,\cdots)\delta u_i\right)\mathrm{d}x=0$，结果没有拉格朗日表达式出现。

是否从 $\int\left(\sum\psi_i(u,\cdots)\delta u_i\right)\mathrm{d}x$ 的不变性也能导出出现散度关系的问题，根据逆定理，同如下表述具有相同的意义，即针对一个不是导向同样的 Δu，Δx 但是导向同样的 $\bar{\delta}u$ 的群，由其是否能得出 I 的不变性。在一重积分和 f 只含一阶导数的特殊情形下，对于有限群可由拉格朗日表达式的不变性得到一次积分的存在性(可参阅比如Engel, Gött. Nachr. 1916, p. 270)。

里的任意函数是这样确立的，如同它们对应类似的关于y, v的无穷小变换的群那样。用$\Im_q$表示将x, u变换到y, v的变换，$\Im_p$是用x, u表示的无穷小变换，则用y，v表示的类似无穷小变换是$\Im_r=\Im_q\Im_p\Im_q^{-1}$，此处参数和任意函数$r$由$p$和$q$所决定。用公式表达，为

$$\Im_p:\xi=x+\Delta x(x,p)\text{，}\quad u^*=u+\Delta u(x,u,p)\text{；}$$
$$\Im_q:y=A(x,q)\text{，}\quad v=B(x,u,q)\text{；}$$
$$\Im_q\Im_p:\eta=A(x+\Delta x(x,p),q)\text{，}$$
$$v^*=B(x+\Delta x(p),u+\Delta u(p),q)\,.$$

由此要得到$\Im_r=\Im_q\Im_p\Im_q^{-1}$，相应的是$\eta=y+\Delta y(r)$，$v^*=v+\Delta v(r)$，其中借助$\Im_q$的逆将$x$作为$y$的函数且只关注无穷小项，则得到恒等式

$$\begin{aligned}\eta&=y+\Delta y(r)=y+\sum\frac{\partial A(x,q)}{\partial x}\Delta x(p);\\ v^*&=v+\Delta v(r)=v+\sum\frac{\partial B(x,u,q)}{\partial x}\Delta x(p)\\ &\quad+\sum\frac{\partial B(x,u,q)}{\partial u}\Delta u(p)\,.\end{aligned}\tag{20}$$

将$\xi=x+\Delta x$用$\xi-\Delta\xi$替代，ξ也回到x，$\Delta x=0$；则根据表达式(20)的第一式η回到$y=\eta-\Delta\eta$；通过此一替代$\Delta u(p)$换成了$\bar{\delta}u(p)$，则$\Delta v(r)$换成了$\bar{\delta}v(r)$，由表达式(20)的第二式得到$v+\bar{\delta}v(y,v,\cdots r)=v+\sum\frac{\partial B(x,u,q)}{\partial u}\bar{\delta}u(p)$，$\bar{\delta}v(y,v,\cdots r)=\sum\frac{\partial B(x,u,q)}{\partial u_k}\bar{\delta}u_k(x,u,p)$，所以只要假设只有$\bar{\delta}v$依赖于参数和任意函数$r$，变分的变换公式实际上也满足[24)]。

特别地，根据(12)式，可得$\sum\psi_i(u,\cdots)\bar{\delta}u_i$的相对不变性，因为关于$y, u$的散度关系也满足，即Div$B$的相对不变性。进一步地，根据(14)式和(13)式，DivΓ的相对不变性，以及同$p^{(\lambda)}$写在一起的依赖关系之左侧的不变性，那里总是变换了的公式里任意函数$p(x)$(以及参数)是用r【译者注：是用下标r标识的相应的量】代替的。由此还得到Div$(B-\Gamma)$的相对不变性。这个不恒为零的方程组$(B-\Gamma)$，其散度恒为零。

从Div$B$的相对不变性，在一维和有限群的情形还可以得到一次积分的不变性。对应无穷小变换的参数变换，根据(20)式，是线性齐次的；因为变换的可逆性，ε关于变换后的参数ε^*也是线性齐次的。如果令$\psi=0$，这个可逆性总成立，因为(20)式中不出现u的导数。令等式Div$B(x,u,\cdots\varepsilon)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot$Div$(y,v,\cdots\varepsilon^*)$中$\varepsilon^*$的系数相等，可见$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}B^{(\lambda)}(y,v,\cdots)$关于$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B^{(\lambda)}(x,u,\cdots)$也是线性齐次的，进而由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B^{(\lambda)}(x,u,\cdots)=0$或者$B^{(\lambda)}(x,u)=\text{const}$.可得$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}B^{(\lambda)}(y,v,\cdots)=0$，或者$B^{(\lambda)}(y,v,\cdots)=\text{const}$.

对应群G_ρ的$\rho-$个一次积分允许该群，因此可简化进一步的积分。最简单的例子是，f不依赖于x或者某个u，这对应无穷小变换分别为$\Delta x=\varepsilon$，$\Delta u=0$，或者$\Delta x=0$，$\Delta u=\varepsilon$。则分别有$\bar{\delta}u=-\varepsilon\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$或者$\varepsilon$，因为$B$可由$f$和$\bar{\delta}u$通过微分加上适当的组合得到，因此也分别不依赖于$x$或者$u$，故允许相应的群[25)]。

6　一个希尔伯特的论断

基于前述讨论，最后我将以推广的群论的表述，给出一个希尔伯特关于广义相对论中“自己的”能量守恒不成立(原因)之间联系之论断(见Gött. Nachr. 1917上克莱因的第一篇文章，答复之第一段)的证明。

设积分I允许一个群$G_{\infty\rho}$，而G_σ是某一指定任意函数而产生的有限群，即群$G_{\infty\rho}$的子群。无

24) 再次表明，必须假设y不依赖于u，结论才成立。可以举克莱因给的$\delta g^{\mu\nu}$和δq_ρ的例子，只要p置于矢量变换之下，这些就满足变分的变换。

25) 在已经从$\int\left(\sum\psi_i\delta u_i\right)\mathrm{d}x$的不变性就引出一次积分存在的情形，这并不允许整个的群G_ρ。例如，$\int(u''\delta u)\mathrm{d}x$允许无穷小变换$\Delta x=\varepsilon_2$，$\Delta u=\varepsilon_1+x\varepsilon_3$，而一次积分$u-u'x=\text{const}$.对应$\Delta x=0$，$\Delta u=x\varepsilon_3$，而另两个无穷小变换是不允许的，因为它显含$u$和$x$。关于含有导数的$f$的无穷小变换也对应这个一次积分。可见，$\int\left(\sum\psi_i\delta u_i\right)\mathrm{d}x$的不变性总是比$I$的不变性意味着少一些内容。关于这一点请注意此前讨论中提出的问题。

限群 $G_{\infty\rho}$ 对应依赖关系(16)式，而有限群 G_σ 对应散度关系(13)式；反过来，任何散度关系的存在可得出 I 针对某有限群的不变性，如果相应的 $\bar{\delta}u$ 来自群 G_σ 的 $\bar{\delta}u$ 的线性组合，则该群必须与 G_σ 同。针对群 G_σ 的不变性不能导致任何不同于(13)式的散度关系。因为自(16)式的成立可得出 I 针对群 $G_{\infty\rho}$ 采用任意 $p(x)$ 得到的无穷小变换 Δx, Δu 的不变性，由此，特别地，有针对特殊群 G_σ 之无穷小变换的不变性，进而有针对群 G_σ 的不变性。散度关系 $\sum\psi_i^*\bar{\delta}u_i^{(\lambda)}=\mathrm{Div}B^{(\lambda)}$ 必然是(16)式的结果，后者也可以写成 $\sum\psi_i a_i^{(\lambda)}=\mathrm{Div}\chi^{(\lambda)}$，其中 $\chi^{(\lambda)}$ 是拉格朗日表达式及其导数的线性组合。因为 ψ 在(13)式和(16)式都是以线性的方式出现，则散度关系特别地应是依赖关系(16)式的线性组合，故有 $\mathrm{Div}B^{(\lambda)}=\mathrm{Div}\sum\alpha\chi^k$，$B^{(\lambda)}$ 自身由 χ，即拉格朗日表达式及其导数一起，以及散度恒为零的函数——类似第2节结尾处出现的 $B-\Gamma$，$\mathrm{Div}(B-\Gamma)=0$，且散度同时具有不变性的特征——线性地组合而成。散度关系，据其 $B^{(\lambda)}$ 以所阐述的方式由拉格朗日表达式及其导数构成，我称之为“非自己的”，其它的称为“自己的”。

若反过来散度关系是(16)式中依赖关系的线性组合，即是“非自己的”，因此针对群 G_σ 的不变性可从针对 $G_{\infty\rho}$ 的不变性得到，群 G_σ 是群 $G_{\infty\rho}$ 的子群。针对一个有限群 G_σ 的散度关系是“非自己的”，当且仅当群 G_σ 是 I 针对其是不变量的那个群 $G_{\infty\rho}$ 的子群。

通过群的特殊化，这里可得出希尔伯特的原始论断。将“位移群”理解为有限群，$y_i=x_i+\varepsilon_i$，$v_i(y)=u_i(x)$，即 $\Delta x_i=\varepsilon_i$，$\Delta u_i=0$，$\bar{\delta}u_i=-\sum\frac{\partial u_i}{\partial x_\lambda}\varepsilon_\lambda$，针对位移群的不变性早已断言，在 $I=\int\cdots\int f(x,u,\frac{\partial u}{\partial x},\cdots)\mathrm{d}x$ 中的 f 不显含 x。相关的 n 个散度关系为 $\sum\psi_i\frac{\partial u_i}{\partial x_\lambda}=\mathrm{Div}B^{(\lambda)}$，$(n=1,2,\cdots n)$，被当成是能量关系，因为这个变分问题的守恒律 $\mathrm{Div}B^{(\lambda)}=0$ 对应能量定律，而 $B^{(\lambda)}$ 对应能量分量。下列表述成立：若 I 允许位移群，则能量关系是“非自己的”，当且仅当 I 针对一个无限群是不变的，位移群是该群的子群[26]。

这样的无限群的一个例子是所有 x 变换以及诱导的 $u(x)$ 变换的群，其中只有任意函数 $p(x)$ 的导数出现。位移群通过特殊化过程 $p^{(i)}(x)=\varepsilon_i$ 得到，但是是否用通过改变 I 以一个边界积分而发生的群那样的方式就给定了最一般性的那个群，仍是悬而未决的。前述那种诱导变换会如此产生，即将 u 置于一个“全微分形式”，即 $\sum a\mathrm{d}^\lambda x_i+\sum b\mathrm{d}^{\lambda-1}x_i\mathrm{d}x_k+\cdots$ 的形式，除了 $\mathrm{d}x$ 还包括高阶导数，的系数变换之下；特别特殊化的诱导变换，其中 $p(x)$ 只以一阶导数的形式出现，可通过常微分 $\sum c\mathrm{d}x_{i_1}\cdots\mathrm{d}x_{i_\lambda}$ 形式的系数变换得到。人们一般只考虑这种情况。

别的这一类的群，因为对数函数项的出现不可能是系数变换，是如下这样的，

$$y=x+p(x),\quad v_i=u_i+\lg(1+p'(x))=u_i+\lg\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x};$$

$$\Delta x=p(x);\quad \Delta u_i=p'(x)\ ^{27)},\quad \bar{\delta}u_i=p'(x)-u_i'p(x).$$

此处依赖关系(16)式应为

$$\sum(\psi_i u_i'+\frac{\mathrm{d}\psi_i}{\mathrm{d}x})=0,$$

“非自己的”能量关系为

$$\sum(\psi_i u_i'+\frac{\mathrm{d}(\psi_i+\mathrm{const.})}{\mathrm{d}x})=0,$$

则群的最简单的不变积分为

$$I=\int\frac{\mathrm{e}^{-2u_1}}{u_1'-u_2'}\mathrm{d}x.$$

最一般的 I 可通过积分李微分方程(11)式 $\bar{\delta}f+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f\cdot\Delta x)=0$ 予以确定，为此要带入 Δx 和 $\bar{\delta}u$

26) 经典力学以及旧相对论(那里 $\sum\mathrm{d}x^2$ 变换到自身)的能量定律是“自己的”，因为这里没有无限群出现。

27) 有限的情形可根据第4节结尾部分的方法由这些无穷小变换往回计算而得。

28) 此处再次证明了克莱因的一个说法的正确性，即在物理学中到处都是的“相对性”应该用“相对某个群的不变性”来替换 (Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe, Jhrber. d. d. Math. Vereinig. Bd. 19, S.287, 1910;也发表在Phys. Zeitschrift上)。

的值，只要假设f只依赖于u的一阶导数，则李微分变成

$$\frac{\partial}{\partial x}p(x)+\left\{\sum\frac{\partial f}{\partial u_i}-\frac{\partial f}{\partial u_i'}u_i'+f\right\}p'(x)+\left\{\sum\frac{\partial f}{\partial u_i''}\right\}p''(x)=0$$

(关于 $p(x)$， $p'(x)$， $p''(x)$ 恒成立)。这个方程组对两个方程 $u(x)$ 有包含导数的解，即

$$f=(u_1'-u_2')\Phi(u_1-u_2,\frac{e^{-u_1}}{u_1'-u_2'}),$$

其中 Φ 是给定两个argument的任意函数。

希尔伯特是这样表述他的论断的，“自己的”能量定律的失效是广义相对论的特征。为了让这个论断逐字成立，“广义相对论”的说法应该拓展开来理解，要拓展到基于前述依赖于n-个任意函数的群上[28)]。

推荐阅读

Neuenschwander D E. Emmy Noether's Wonderful Theorem. The Johns Hopkins University Press，2011

译后记

群、变换、对称性、不变性、守恒律，这些我们在学习理论物理时经常会遇到的概念，其所具有的丰富内容和深刻联系，远不是那些二、三手教科书随便几句就能说清楚的。笔者当年上大学、读研、当青椒的时候，基本上就是凭着几句简单的描述就误以为自己知道了些的。译完了艾米的这一篇，浏览了类似主题的其它三篇，笔者的感慨，千言万语汇成一句话：“我们都太年轻了。——《冰山上的来客》”。

如果上天再给我一次在德国居留的机会，我一定会去寻访那些名人的足迹，去汲取一点他们给人类社会留下的精神与知识之精华。

——2020.02.29动笔，2020.03.10完稿于疫情笼罩的北京

新书推荐

读者和编者

内容简介：《相对论–少年版》，科学出版社2020年4月出版，由中国科学院物理研究所曹则贤撰写，系作者2017年所著《量子力学–少年版》一书的姊妹篇。该书是作者为自家的少年撰写的一本相对论入门书。全书共15章，按照朴素相对论、伽利略相对论、狭义相对论、广义相对论和整体相对论的顺序，以相对性思想的历史演化为线索，详细介绍了相对论所应包含的数学、物理和哲学内容。本书的一个重要特点是，它尽可能多地收录了相对论的原始文献和重要著作，强调相对论创立过程的细节。此外，本书是一本严肃的书，它还提供了修习相对论所需要的关键数学基础，尽可能多地包含相对论的数学公式，此外还包括相对论关键人物与事件以及爱因斯坦的相对论著作目录。本书适合中学生以上各智识阶层人士阅读。读者可根据个人数理基础和喜好选择合适的阅读策略。

推荐理由：相对论的发展是一个长达300余年的思想过程，在爱因斯坦1915年奠立广义相对论的那一刻达到了顶峰。相对论是纯粹理性思维的胜利，是物理现实的内在和谐与数学表达的形式美学之间完美的相互激励，是严谨的日耳曼文化与浪漫的拉丁文化的灿烂结晶。物理规律的变换不换性是相对论的核心思想。沿着朴素相对论、伽利略相对论经由狭义相对论抵达广义相对论，这一条绵密的思想河流上有激动人心的关于物理学创造的历史画卷。《相对论–少年版》一书为我们展示了这一画卷的深刻与动人之处。