

物理学咬文嚼字之七十五

内一外

曹则贤[†]

(中国科学院物理研究所 北京 100190)

2015—07—24 收到

[†] email:zxceao@iphy.ac.cn

DOI:10.7693/wl20150809

外不殊俗，而内不失正，与一世同其波流……

——嵇康《与山巨源绝交书》

不识庐山真面目，只缘身在此山中。

——李白《望庐山瀑布》

摘要 人心起了内外的分别，也就把内外的分别带入到数学与物理中去了。西文数学物理文献中的 in-/(ex-, out-), (endo-, eso-)/(exo-, ecto), (intra-, intro-, inter-)/extra, inner/outer, implicit/explicit, intensive/extensive, internal/external, intraneous/extraneous, interior /exterior, intrinsic /extrinsic 等前缀或词汇，让中文的内外穷于应付。

1 引子

人关于内外的区分恐怕始于其意识的原始时代。当他认识到自己之可以同环境相区分，如果不是相分离，的存在时，他就起了分别心，分得出内与外。内外之区分，随时随地，亦虚亦实，一切事物皆逃无可逃。躯壳有内外，不时外感



图1 埃舍尔的作品“静物与街道”

风寒内积湿热；家事分内外，外子内人各司其职；国事分内外，内政外交各有偏重；等等。然内外之分多为便宜之举，难免失于草率，或者干脆于理无据，故不可执著。医家专业分内科、外科，病人的痛楚却不敢如此矫情；圣人谆谆教导人民表里如一，自己大抵总是“外有忠诚，内怀奸诈”（见《封神演义》）。至于“宁与外贼，不与家奴”或者“攘外必先安内”之类的口号，是糊涂话，更是混帐话。

西方人对内外的思考似乎更抽象些。罗曼罗兰1942年写过 *Voyage intérieur*，讲述关于发现内心之我 (moi intérieur) 的旅行，评论说他是 writing introspectively (以内省的方式创作)。马赫说“比较是科学之内在生命的最具威力的元素 (But comparison is also the most powerful element of the Inner life of science)”^[1]；

黑格尔哲学中外化¹⁾的概念(externalization)据说是现代意识形态的驱动力；而在弗洛伊德的心理学中，外化是一种下意识的防卫机制。外化的反面是内化(internalization)。这些抽象的内外概念一脸的冷冰冰。

在埃舍尔(M.C.Escher)的一幅作品“静物和街道 (Still Life and Street, 1937)”中，屋内和屋外的空间之间的界线消弭了。传统的绘画会用个窗口把内外空间分开来，而埃舍尔在这幅画中却直接用交接物体的双重定义把它们粘到了一起：屋里的书本是屋外的建筑物，屋外的街道直接和屋里的桌子联成一体。埃舍尔的作品总是能反映他非同寻常的哲学洞察力、空间想象力和艺术表现力，令人击节赞叹。

内外的消弭在莫比乌斯(A. F. Möbius)的一个数学概念里是严格地、自然而然地实现的。将一条纸

1) 马克思哲学里有异化的概念，alienation。——笔者注

带拧过 180° 后把两端粘起来就得到一条闭合的带状结构，称为莫比乌斯带(Möbius band)。莫比乌斯带最惊人之处是这里没有了内外——它是单面的。埃舍尔创作了系列的莫比乌斯带(图2)，具有强烈的视觉冲击力。

在常见的西文数学、物理文献中，表示内外的词(前缀)花样翻出，笔者随手检索一下就发现有in-/(ex-out-), (endo-, eso-)/(exo-, ecto), (intra-, intro-, inter-)/extra, inner/outer, implicit/explicit, internal/external, intraneous/extraneous, intrinsic/extrinsic, interior/exterior等组合。麻烦的是，这些内外的用法还时有重叠或交叉，如内能就有inner energy, internal energy和intrinsic energy这三种说法，extrasolar planets也写成exoplanet(太阳系外行星)，而outer differential和exterior derivative那可是不同的东西。

英文的内外，最简单的是in-/out-这一对，常见词汇如inside/outside可能不会带来困难，但人们对within / without的理解就可能有失偏颇。英汉字典教人without，常取其“没有”的引申意思，却容易忘掉其本意是with+out，如without one's reach即有鞭长莫及之意。另外，象inter-, intro-, intra-如出一辙，都是“内”的意思，但也有明显的差别。Inter-对应between, intra-对应within，而intro-对应inwardly, on the inside，故intermolecular force是两个分子之间的力，intramolecular force是分子内部存在的力；而introduction本意是朝里面拉，固有导入的意思，所以谈“make an introduction”要注意其中费力钻营的成分。

对于在数学物理中较成体系的

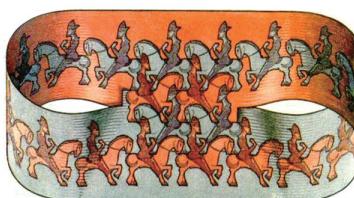
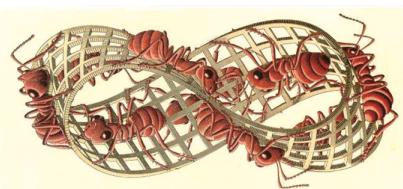


图2 M. C. Escher的莫比乌斯带系列之蚂蚁(Ants)和马(Horse 2)

内外概念，本文接下来逐对加以辩剖。

2 Inner vs. Outer

Inner/outer这一对象是in/out的比较级。Inner的意思是farther within; outer的意思是farther without, relatively far out，字典还说它代替uttere这个拉丁语词汇，即英语的utter。Utter作为动词强调的是outward(向外)，说出(情感)、发出(光亮)和花出(假币)都是它应有之意。在理解inner/outer修饰的词汇时，可以就将它们按照形容词原级理解，也可以按照比较级来理解，前者如在system's inner mechanism and outer rules(系统的内在机理与外部规则)，管状物的inner diameter(内径)和outer diameter(外径)等概念中，后者如在inner organ(内脏), inner circle(小圈子)等用法上。Inner/outer被用来定义乘积，故我们时常会遇到内积/外积的概念，后文中会和容易混淆的其它表达一起介绍。

3 Implicit vs. Explicit

Implicit和explicit的前缀分别是内外(in-/ex-), 词干是plicare, to unfold。Explicit, 即向外部完全展示的，有明确的、直言不讳的意思，动词形式用explicate; 与此相对，implicit是隐含的、含蓄的意思，动词形式为imply。

物理学中也要用到的一个数学概

念是 explicit/implicit function。Explicit function, 显函数，指非独立变量关于独立变量的表达式被明确写出来的函数，如 $y=x^2-1$; 而implicit function, 隐函数，则是由非独立变量和独立变量一同构成的一个关系式，如单位圆的表达式 $x^2+y^2=1$ 。关于隐函数有隐函数定理。不知道那些只能用微分、积分形式表达的函数算不算implicit function。

Implicit和explicit常以副词形式被用到。在经典力学中，系统的动力学由拉格朗日量决定。拉格朗日量是一组广义坐标、广义速度和时间的函数。如果拉格朗日量不是dependent explicitly on a variable(显含某个变量)，那就意味着相应地存在一个运动常数。比如，如果拉格朗日量没有explicit dependence on time(显含时间t)，那么能量是守恒的。哈密尔顿等人发展的正则变换和Hamilton-Jacobi方程，就是为了更好地寻找运动常量，这个思想在Noether定理那里发展到了极致^[2]。

4 Intensive & Extensive

Intensive和extensive字面上分明是向内(向外)扩展(to stretch)的，可是在至关重要的热力学语境中，extensive quantity和intensive quantity分别被译成广延量和强度量，汉语字面上看不出内外了。广延量满足可加性，即一个体系的某个物理量 X ，若将系统数学地分成两部分(此即partition, 统计力学所谓的配分)，该物理量在两子系统中分别为

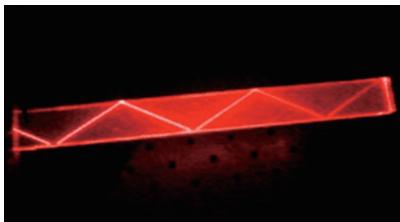


图3 光在玻璃中的全反射

X_1, X_2 , 则必有 $X=X_1+X_2$ 。热力学量如熵 S 、体积 V 、表面积 A 、粒子数 N 、电极距 \vec{P} 、磁感应强度 \vec{M} 等都是 extensive quantities, 对应的温度 T , 压强 p , 表面张力 σ 、化学势 μ 、电场强度 \vec{E} 和磁场强度 \vec{H} ²⁾, 都是 intensive quantities。关于强度量的性质, 康德在《纯粹理性批判》中有深入的分析: 强度量只可从整体上把握, 其 0 值只能理解为朝向负值方向的逼近³⁾(即 0 不可能达到)。所谓温度的绝对零度不能达到被某些人当成很高深的问题在讨论, 不知道何高深之有。别的强度量也有同样的性质, 玩过超高真空的人都知道, 压强为零也永远不能达到。当然, 液膜的表面张力也别指望会为零。

有了广延量和强度量, 由它们组成了 Pfaffian form $dU=TdS-pdV+\sigma dA+\cdots$, 可见内能 U 就是关于系统(拥有广延量)和环境(拥有强度量。平衡态时系统的强度量和环境的强度量应该相等)之间接触的描述⁴⁾, 则上述方程表述的就是接触几何(contact geometry)。这为看待热力学提供了一个清晰的视角。

5 Internal vs. External

Internal/external 这组对应内外

的词来自拉丁语的 internus/externus, 除了在内、在外的意思外, 严格说来还有朝内、朝外的意思。这组内外之间有很好的对应, 如电场分 external field(externally applied field)/internal field, 受力分 internal force/external force, 康德哲学有 internal-/external freedom 的说法, 等等。物理学家只能在宇宙内部观察宇宙, 因而是 internal observer (内部观察者); 上帝才可能是宇宙的 external observer (外部观察者), 那样的物理学当然不是我们人类所能企及的。一个力, 如果造成了体系明显的位移, 那么所作的功就是 external work (外功)⁵⁾, 而系统内粒子克服相互吸引而分离所作的功被称为内虚功 (internal virtual work)。经典力学里有虚功原理: 当平衡的力或应力作独立但自洽的位移或者形变时, external virtual work (外虚功) 等于内虚功。刚体运动是内虚功等于零的特例。

象在 internal energy (内能的说法之一)一词中, internal 肯定是“在内部”的意思。Total internal reflection(全反射), 字面上是“全部向内的反射”, 而 reflect back internally 这种表达也应该是“朝内反射”的意思。当光从光密介质射向光疏介质且入射角大于某个临界值时, 射向光疏介质的成分消失了, 这被称为全反射(图 3)。全反射是非常有趣的现象, 如果在反射截面附近(几个波长以内)再放置一块光密介质, 出射光又出现了, 这被称为 frustrated total internal reflection, 意思是全反射没能进行得彻底。这有点量子隧穿的味道: 光疏介质可看作是个势垒, 光予以一定几

率隧穿过去, 其背后的机理是倏逝波(evanescent wave)耦合。愚以为, 这地方存在理解光(传播)本质的某些奥秘, 可惜俺没能参透。或有值得参悟处也未可知。

Internal/external 还被用于修饰转动此一物理学重要概念。在如下的这段话中, “SO(3) is used to describe and calculate external rotations. SU(2) and SU(3) are used to describe and calculate internal rotations, while SU(2) deals with systems with two states, and SU(3) deals with systems with three states”, 这里所谓的 external rotation (外部转动) 应该指的是轨道角动量, 而 internal rotation (内部转动) 应该指的是自旋。

热力学中内能这个概念是学物理的人必须认真对待的。关于内能, Clausius 在解释他的内能(innere Energie)函数 U 的时候, Thomson 也发展了类似的函数 $e(V, t)$, 其中 V 是体积, t 是温度。Thomson 将之命名为 mechanical energy (机械能)——他将之理解为系统同环境交换了热和功以后储存在体系内部的力学效应(mechanical effect)。Thomson 后来又称之为 intrinsic energy, 再后来 Helmholtz 用了 internal energy 此一选择^[3]。这后一种表达一直沿用到现在。内能是一种热力学势, 满足对势能的数学要求 $d \wedge dU = 0$ 。系统吸入热量可以做 external work ($-pdV$), 也可以做 internal work (增加内能)。

上面提及了热力学势需要满足的条件 $d \wedge dU = 0$ 是以外导数(exterior derivative)形式表达的。Exteri-

2) 我使用这样的符号是提醒大家它们和相应的强度量构成能量项时的“乘积”是各不相同的算法。——笔者注

3) 原文为 Nun nenne ich diejenige Größe, die nur als Einheit apprehendiert wird, und in welcher die Vielheit nur durch Annäherung zur Negation=0 vorgestellt werden kann, die intensive Grösse。那些不屑掌握自然科学的纯粹哲学家们和不屑进行哲学思考的自然科学家们不容易理解这一句。——笔者注

4) 这句话细究起来问题不少。——笔者注

5) 中国功夫强调内功与外功之分。外功指拳脚功夫, 注重一招一式; 内功是练气, 讲究呼吸吐纳。估计内外兼修才能成为大家。——笔者注

or derivative 的规则为 $d(fa) = df \wedge a + f \wedge da$ ，满足反对易关系 $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ 。与此对应有 inner differential，其规则为 $d(ab) = (da)b + adb$ 。除此之外，还有 inner and outer differential calculi (内外微积分?)，它们在引力理论中有应用。

热力学用 exterior derivative 表示会显得简单明了^[4]，英文文献中这样的尝试早就开始了^[6]。从主方程 $dU = TdS - pdV$ 出发，取 $d \wedge dU = dT \wedge dS - dp \wedge dV = 0$ 。自 (T, S) 和 (p, V) 中各任取一个作为变量，剩下的作为函数用那两个变量展开，很容易得到四个所谓的 Maxwell 关系。这个方法的好处是，没必要再去引入 enthalpy (H , 焓), Helmholtz free energy (F , 赫尔姆霍兹自由能), Gibbs free energy (G , 吉布斯自由能)。许多人认为热力学难学，可能与引入的热力学势函数太多有关，殊不知那不过是数学游戏而已，无关热力学的物理本质。

几何上也有内分和外分之说，不要和内导数、外微分弄混淆了。给定共线的三点 A, B, C ，而 L 为线外的一点(图4)。假设 C 交连线 LA, LB 于 M, N ，而 BM, AN 交于点 K ，连线 LK 交线段 AB 于点 D ，则我们说 C, D 分别外分(divide externally) 和 内分(divide internally) 线段 AB ，即 $AD/BD = AC/BC$ 。点 D 是 C 的调和共轭的(harmonic conjugate)。

6 Intranous vs. Extraneous

按照字典解释，intranous 的意思是 being or growing within；extraneous 的意思是 coming from outside；foreign，所以使用这一对内外修饰词时应注意其对来源、生长处的强调。因此，象 cultivation of tissues in extraneous media (外部媒质

中的组织培养)，removal of an extraneous substance (异物摘除)，intraneous noises (内噪声)，intraneous/extraneous species (内生/外来种群) 之类的用法就容易理解了，都和生长、产生有关。作为专业词汇，intraneous/extraneous 还被用来描述微分方程的解。根据其是否是通解，方程的奇异解可进一步细分为 intraneous solution 和 extraneous solution。Intranous 的用法似乎不多见，常见 extraneous 和 intrinsic 一起对照使用。

7 Interior vs. Exterior

Exterior，外边，但是还强调 on the outside (坐落在外部)，originating outside；acting or coming from without(源自外部，起于外部)；interior 可作相应的理解。例如，细胞壁上的离子通道在细胞内外传输离子 (pass ions between the cell exterior and interior)，这里的内外有相当的纵深。当然，exterior 和别的表示“外”的词也多混用，比如 exteriorized thought，也叫 externalized thought (思想外化)，或者叫 alienation of thought (思想的异化)，都是指 computational formalism of mathematics (对数学的计算形式表述)——用词的混乱可能是因为数学家气得哆嗦了。当然，涉及数学的内外概念确实花样百出，用词与意义都可能造成误解。内积有 inner product 和 interior product，外积有 outer product 和 exterior product (wedge product, cross product)，应该仔细区分。

7.1 Inner product

在学习矢量分析时我们认识了内积(inner product)，也叫 dot product (因为使用记号为点)，或者 scalar product (因为运算结果为标量)，是对

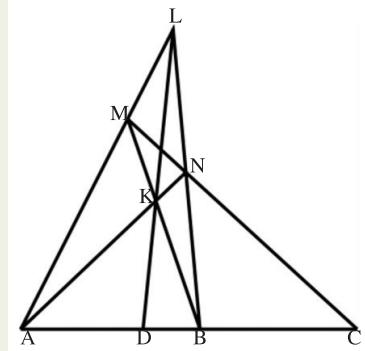


图4 线段AB的内分与外分

等长数列的计算。内积对数列进行相应位上数字乘积后求和，几何上可以理解为把矢量当成其坐标表示的数列所进行的操作，它等于矢量模之积乘上矢量间夹角的余弦。与一般代数乘积不同， $a \cdot b = a \cdot c$ 且 $a \neq 0$ ，不能得出 $b = c$ 的结论，即不遵从消去律。

内积(inner product)可以推广到连续函数，如果函数定义在定义域 $[a, b]$ 上，内积定义为 $\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x)v(x)dx$ ；进一步地，可以推广到复变函数， $\langle \Psi, X \rangle = \int_a^b \bar{\Psi}(x)X(x)dx$ 。注意，内积允许引入权重函数(weight function)。在量子力学中，对波函数内积的积分常出现权重函数，那是因为积分本就是对 3D 空间积分的；对于选定的积分变量，那个权重函数和该积分变量的乘积之量纲为体积。

提醒读者注意，电磁学中的磁通量，其表示为貌似内积的积分 $\int_S B \cdot d\sigma$ ，其实不是。磁场和面积元都不是矢量！

7.2 Outer product

矢量的 inner product，要求矢量的维数相同， $\langle u, v \rangle = u^T v$ ，其结果是一个标量。与 inner product 相对应的一个外积是 outer product。Outer prod-

6) 笔者给一年级大学生讲热力学就使用 exterior derivative 表示。——笔者注

uct 典型地是指两矢量的张量积，

$$u \otimes v = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \end{bmatrix} [v_1 \ v_2 \ \cdots], \text{ 结果是一个}$$

$m \times n$ 阶的矩阵，可简写为 $c = a \otimes b$ ， $c_{ij} = a_i b_j$ 。张量的 outer product 就是张量积。

7.3 Interior product

Interior product，汉语字面上似也应该译成内积，但它不是 inner product，它对应 interior derivative (inner derivative，内微分)。Interior derivative is a degree-1 antiderivation on the exterior algebra of differential forms on smooth manifold。这句话太可怕，涉及 exterior algebra(外代数)，光滑流型和微分形式。Interior product 定义为一个微分形式同一个矢量场 I_x 之间的收缩，它把一个 p -形式 ω 变成 $(p-1)$ -形式 $I_x \omega$ 。这种内积是辛几何和广义相对论中常遇到的。也存在这个意义下对应的 exterior product。

7.4 Exterior product

与矢量内积(inner product)对应的一个外积是 exterior product，也称 wedge⁷⁾ product (因为使用尖劈符号)，德语为 äußeres Produkt，在 Grassmann 最初的著作里被称为 kombinatorisches Produkt (组合积)。该外积的形式为 $\vec{u} \wedge \vec{v}$ 。 $\vec{u} \wedge \vec{v}$ 就在 \vec{u} , \vec{v} 规

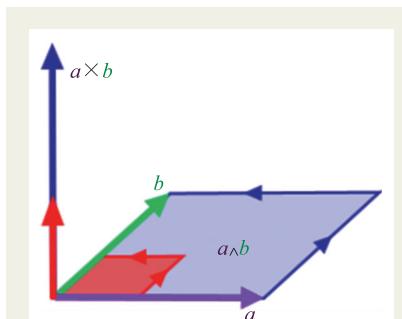


图5 三维空间中的外积 $a \wedge b$ 与叉乘 $a \times b$

定的二维平面内，首尾相连，不用右手定则。外积是反对易的， $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ 。两个矢量的 wedge product 为 bivector (几何意义是带取向的平面)，它是 2-blade (从物理的观点来看，如果矢量是长度，它就是面积层面上的东西)。以此类推， $\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w}$ 是这三个矢量围成的平行六面体。乘积是 wedge product 的代数体系是外代数(exterior algebra)，用于物理学会揭示很多新的关系。比如，从 bivector 的角度看磁场 B ，麦克斯韦方程就在诉说不同的故事。

7.5 Cross product

对于物理学家来说，麻烦的是还有一个容易和 wedge product 相混淆的 cross product， $a \times b$ ，汉译叉乘。按定义， $a \times b$ 的结果是个与矢量 a , b 都垂直、值为该两矢量构成之平行四边形面积的矢量(坑死人的定义)，取向可采用右手定则确定(图 5)。外积(wedge product)存在于所有的维度；叉乘就不一定了。给定取向约定和度规，在 n -维空间中可以取 $(n-1)$ 个矢量之积作为一个同 $n-1$ 个矢量都垂直的矢量。但如果限制在非平凡的两矢量积，且结果为一矢量，这种情形只存在于三维和七维空间中；而如果要求该矢量是唯一定义的，则只存在于三维空间中。三维矢量的叉乘可由四元数的乘积得到，同样，七维矢量的叉乘可由八元数乘积得到。根据 Hurwitz 定理，赋范可除代数只有 1, 2, 4, 8 维几种情形，则叉乘只出现在三维和七维空间就容易理解了^[5]。

在三维空间中，叉乘和外积通过 Hodge 对偶连接起来。两个矢量的 wedge product 是个 bivector，其在三维空间中的 Hodge 对偶是一维矢量，即有 $A \times B = *(A \wedge B)$ 。在四维空间中，两个矢量的 wedge product

是个 bivector，bivector 的 Hodge 对偶还是 bivector。叉乘在四维情形无法定义。我们生活在三维空间；很幸运三维空间确实很特殊！

1843 年 Sir William Rowan Hamilton 为了描述电磁学引入了四元数，以及矢量和标量的概念。给定任意零标量的四元数 $[0, u]$ 和 $[0, u]$ ，它们按照四元数法则的乘积为 $[-u \cdot v, u \times v]$ ，也即结果的标量部分为矢量的点乘，矢量部分为矢量的叉乘。Heaviside 觉得四元数笨重，其积的标量和矢量部分要提取，于是分别引入了标量积和矢量积，可想而知他遭遇到了激烈的反对。但是因为 Heaviside 成功地把麦克斯韦方程组从 20 个方程减少到了 4 个，这个算法从而蔓延开来，(愚以为)也带来了灾难性的后果。而叉乘的称呼则是由 Gibbs 引入的，此改变借由所谓的矢量分析而得以传播开来。

作为一个 n -维空间中的矢量，就算叉乘垂直于其它 $(n-1)$ -个矢量积不是问题；但如从物理的角度来看，问题就来了。如果矢量的量纲为 L ，那么这个叉乘结果的量纲应该是 L^{n-1} ，这是完全不同的物理量！另外， $a \times b$ 的定义还有取向的约定，若对坐标系作反演， $a \times b$ 的方向不变，这显然不是矢量的性质。容易理解，若两个矢量的内积不再是矢量了，它们的外积怎么可能还是矢量呢？于是，人们不得不加以区别，把矢量叉乘的结果称为 pseudovector (赝矢量)。

说到赝矢量，一个典型的例子是 磁场 B 。考察洛伦兹公式 $F = qv \times B$ ，这里力 F 和速度 v 都是矢量，磁场 B 则无论如何不可以是矢量。误把磁场 B ，以及 H ，当成矢量的电磁学和电动力学不知掩藏了多少错误⁸⁾，比如较严重的有所谓磁单

7) Wedge 的发音就是外积，这倒有助于我们中国人记忆。——笔者注

极的概念。有人对着4方程的麦克斯韦方程组琢磨其所谓“更对称”的形式，为此引入磁单极，却对那个方程组里物理量的数学性质不甚了了。仅从数学的角度看，这个概念就错得低级（别以为Dirac在谈论量子力学时提及存在monopole就可以照葫芦画瓢，Dirac可不糊涂）；当然字面上它也错得低级，如果是pole，它就不可能是mono-的。你可以判断，这个让麦克斯韦方程组“更对称”的努力一定来自一个哲学、美学双重虚无主义者。

点乘包含矢量的对应项（corresponding terms）之积，而叉乘包含矢量的非对应项（non-corresponding terms）之积，所以两者相互补充才是完备的。这一点也可从矢量 $[0, u]$ 和 $[0, v]$ 通过四元数之积得到的结果， $[-u \cdot v, u \times v]$ ，看出。一对物理矢量，其点乘和叉乘在一起才能保全所有的信息。在几何代数中，几何乘积表示 $rp = r \cdot p + r \wedge p$ 就包括内积、外积两部分。

对于一个运动的质点，关键的矢量是其位置和动量，这两者构成了所谓的相空间，这是经典力学和统计物理的概念基础。我们知道这两者的叉乘， $r \times p$ ，称为角动量，是物理量的重中之重。注意，角动量如果是由叉乘定义，而叉乘又只在三维空间里有定义，那限制就太大了。可以把角动量改写成 $L_{ij} = x_i p_j - p_i x_j$ ，规定了这样的算法，就不受维度限制了。角动量显然是pseudovector，角动量的表示简直是量子力学的半边天。那么点乘呢？ $r \cdot p$ 被称为virial，不知如何翻译。（中文）经典力学不强调 $r \cdot p$ ，显然不完

整，当然也就这么不完整着。据说暗物质概念的导出就同计算 $r \cdot p$ 有关。

8 Intrinsic vs. Extrinsic

Intrinsic (intra, within + secus, following)，源于内部的、内在的，不依赖于外部环境，汉译固有的、内禀的，数学上会翻译成内蕴的。与此相对，extrinsic (exter, without + secus, following)，意思是 being, coming, or acting from the outside; extraneous，汉译非固有的、外在的。Intrinsic 和 extrinsic 的词干是 secus (following)，这一点在使用时应该特别关注。

人们研究自然对象时，总是会带入研究者的因素，包括研究者所在的空间，所采用的参考框架和坐标系等，这些都是外来的(extrinsic)因素，而我们追求的是事物自身的性质 (properties of intrinsic nature)。例如，曲线、曲面那些依赖于其嵌入坐标空间的性质是extrinsic的，而弧长是曲线的内蕴性质。愚以为认识到不管空间如何弯曲但路径(弧长)的概念总是有效的，太了不起了。外在曲率(extrinsic curvature)是关于一个嵌入到另一个空间(一般是欧几里得空间)中的几何体定义的，与同该几何体接触(touch, tangent)的圆的曲率半径相关。而内蕴曲率(intrinsic curvature)则是定义在黎曼流型的每一个点上的。高斯曲率，即曲面两主曲率之积，是曲面的内蕴性质。高斯1827年证明高斯曲率可由曲面基本型的度规系数给出，因而是一个内禀性质。更复杂的内蕴微分几何(intrinsic differential geometry)可是大多数

学物理的人要补的课。

在物理学中有 intrinsic nature, intrinsic property, intrinsic feature 的说法，比如 spin is intrinsic degree of freedom(自旋是内禀自由度)，粒子的电荷、质量都被称为 intrinsic parameter(内禀参数)的，等等。解释清楚这些内禀的性质不容易，不过如果知道狄拉克方程可导出电子有 $1/2$ 的自旋，基本粒子的质量是对称群的标签，电荷联系着规范对称性，也许多少能找到一点感觉。半导体也分 intrinsic/extrinsic，这个比较好理解。Intrinsic semiconductor (本征半导体⁸⁾, i-semiconductor，指未掺杂的半导体，其载流子来自热激发或光激发；extrinsic semiconductor (非本征半导体)，乃是 doped 半导体，有杂质原子占据了晶格。依赖于杂质的选择，extrinsic 半导体分为n-和p-型半导体。愚以为，将 intrinsic/extrinsic semiconductor 译成内因性半导体和外因性半导体也许更合适些。

物理学有一些 intrinsic difficulties (内蕴困难)。一个不得不面对的内在困境是时间问题。在相对论中，至少是在太过随意的 Minkowski 空间中，时间和空间是地位相同的(或者，严肃一点，时空是写成 $(x, y, z; ict)$ 形式的)，而在量子力学中，空间是观测量，是算符，而时间只是参数(在量子场论中， (x, y, z, t) 都是参数)。这个关于时空关系的率意而为显然暴露了关于物理学我们还远没有统一的认识，或者还没学会对物理学有统一的要求。此外，intrinsic difficulties 还包括会遭遇 0 和无穷大。摒除了 0 和无穷大，一切都好处理——无穷大相比

8) 一个有必要认清的事实是，Thomson 在引入 thermodynamic(热力学的)一词时用的是 thermo-dynamic 的形式，这表明热力学中的热和功是平行的概念。有鉴于此，愚以为 electromagnetic 应该理解为 electro→magnetic，(至少就麦克斯韦方程组而言)——磁相对于电是下一层面的事情。——笔者注

9) 此本征非量子力学里的本征，那里的本征是对德语词 eigen(自己的)的翻译。——笔者注

于0可能还好处理一些。宇宙真的是无穷大吗？当我们随手写出，比如两电荷间的距离，为0时，我们问过0真的存在吗？或者，如同热力学中的可逆过程，零相对于有，或者void相对于atom，只是一个虚拟的、抽象而来的概念？这些intrinsic difficulties在相当长的时间里还会继续阻碍物理学的发展。

9 Endo-, Eso- vs. Exo-, Ecto-

最后介绍一对和物理学有关的“内—外”前缀endo-/exo-, ecto-。Endo-, 来自希腊语 $\epsilon\nu\delta\omega$ (endon)，内部、在(从)内部的意思。物理、数学上常见的词汇包括endomorph (内胚型体，内部成型，内容矿物)，endomorphism of algebra¹⁰⁾ (代数的自同态)，endothermic reaction (吸热反应)，endothermic process (吸热过程)，等等。这些翻译字面上没有“内”字，不如内窥镜(endoscope)翻译的那么直白，自然从汉语的角度理解也没有那么直观。Eso-, 来自希腊语 $\epsilon\sigma\omega$ ，在现代英语里只见于esoteric(限于圈内人知道的，神秘的，深奥的)，esotropia(内斜视)等少数几个词。

与endo-对应的“外”形式为exo-，来自希腊语 $\epsilon\xi\omega$ ，相关物理概念包括exothermic process (放热过程)，exoergic nuclear reaction (放能的核反应)¹¹⁾，以及exogeneous ionization (外源离化)，例句见“As with a negative corona, a positive corona is initiated by an exogenous ionisation event in a region of high poten-

tial gradient (如同负电晕那样，正电晕也是由高电势梯度区域内的外源性离化事件引起的)”。与endo-对应的还有ecto-，如ectomorph(外胚型体型，瘦弱体型)，endoplasm-ectoplasm (内质膜—外质膜)，endoparasite—ectoparasite (体内寄生一体外寄生)，endoderm-ectoderm(内胚层—外胚层)，等等。

Endo-/exo-之所以引起笔者的注意是因为endophysics和exophysics的说法。当我们着手研究这个世界时，我们总不得不把它分割成两部分，subject and object，汉译主观与客观(字面意思是下层的与上层的)。笛卡尔的分割是把整个实在分成意识与客体(mind—body; spirit—matter)，后来海森堡又进一步把物质世界分成物质的对象(material object)与物质的观测工具，要求观测工具和被观测对象之间不存在EPR式的关联，即量子力学可以将世界表示为tensor-product factorization(张量积形式的因子化)。这在一些学者那里形成了endophysics & exophysics两个概念^[6—10]，涉及关于世界的internal vs. external的观点。

Endophysics，字面上的意思是“physics from within”，研究物理观察如何受制于观察者也在宇宙内的事实。与此相对的是exophysics，那里观察者可以自“外部”观察一个体系(关于宇宙时空结构的研究很难设想研究者能如上帝那样是在研究体系之外)。这样的关于物理的视角，就笔者所知，未见中文语境中的讨论，所以我斗胆将之译为内观物理和外观物理，同主观—客观的

区分相映照。物理学的endo/exo-两分法，即把世界分成研究执行部分和被研究部分，以我的愚见，这不妨归于有我的部分与无我的部分。

在理论上再造一个世界的努力有两种观点：一种朝向外部世界，一种朝向内心世界。前一种观点相联系的物理我们称为exophysics，后一种观点相联系的物理中研究者会意识到self-referential(自我参照)情境，即物理理论中有观测者的角色。Endophysics, to emphasize a viewpoint from within。在exophysics中，实在就是简单的存在，而在endophysics中，实在处于观察者和外部世界的界面上^[8,9]，任何观察的状态都要相对于在界面上的观察者状态来确定。这样，实在是一种主观性的客观。内观物理的精髓在于如何预先规定不可区分性的情境，它关切量子力学的诠释、时间的本性以及意识等问题^[10]。然而，容易想到，所谓观察者和客体之间的界面是不定的，因此观察结果就有了绝对的相对性。Endophysics的观点似乎在物理学界还没引起很大的动静，毕竟一个internal观察者能否跳出界外去获得与external观察者所达到的同样的客观性，这可是个问题。An external observer is a superobserver(外在于体系的观察者是超观察者)，如同拉普拉斯的妖或者麦克斯韦的妖。

10 未尽之言

人之所以能够认识世界，就在于存在把人或研究对象同其环境分隔开的可能，因此产生内外的分别是非常

10) 不会和automorphism的译法混同？In mathematics, an endomorphism is a morphism (or homomorphism) from a mathematical object to itself. For example, an endomorphism of a vector space V is a linear map $f: V \rightarrow V$, and an endomorphism of a group G is a group homomorphism $f: G \rightarrow G$. 太高深，不翻译了。——笔者注

11) 有人将exoergic翻译成放热的，但是核反应释放能量倒是以动能为主；把动能可控地转化成热形式是核电厂运行的关键。——笔者注

自然的。对于特定的对象，习惯于既看内又看外是研究者的基本素养。举个例子，对于量子力学的变换 $\psi = \hat{A}\varphi$ ，算符 \hat{A} 有本征值，本征矢量，这取决于算符本身，算是它的 intrinsic properties。但是，我们还要从外部关照这意味着什么。一个物理系统给定的对称性(内在的)会导致其状态分成具有不同对称行为的本征函数项，表现为选择定则(外在的)。由光谱线的模式及其随外场的变化去猜出系统的 internal 对称性，甚至是自旋这样的 intrinsic degree of freedom，确实是高明的司外揣内本领。

然而系统的内外之分并不会必然造成内外的隔绝。一个系统的内在性质大约总是有外在表现的，要不那么会伪装的圣人内怀奸诈怎么让人给看出来了呢。内涵都在表面上^[11]，这话可不是随便说的。傅里叶就觉得热平衡时一个物体内部的温度分布是由表面上的温度分布完全决定的——这个司外揣内的努力导致了傅里叶分析的诞生。另外一个内外互相印证的典型例子是晶体学，晶体内部原子排列的对称性和晶体外观之间是 totally consistent and coherent。

在有些地方，内外无可分，比如 Möbius 带这样的结构。而在有些地方，即起了分别心，却又分得含含糊糊前后不一，这就麻烦了。热力学语境中的内外就让笔者十分头疼。热

力学系统的 S, T, p, V 等那是系统内部的事情，而做功和热流则与外部环境有关。说 $\delta Q/T$ 是状态函数那是内外不分， $dS = \delta Q/T$ 中的 S 才是系统的状态函数——这个方程一头在外，一头在内。此外，系统的压力是内部变量，所以热力学主方程中的体积变化做功项始终有个负号， $-pdV$ ，可是对于电介质和磁性材料，相应的做功项中的强度量又都是外场的强度。使用外场的合理性接说电磁学该给个 explicit 解释的，偏偏藏着掖着让人们自己琢磨。

偶然看到一幅照片，自水面反射成像的白云、荷叶与荷花，自水中透射成像的鱼儿，水面上的浮萍，浑然一体(图 6)。这样表述是典型的“describe in external mold (以外部模式描述)”，其中“内—外—界面”的定义是清楚的。作这样的描述的基础是我们是外在的观察者——上帝的形象产生的心理基础可能就是我们此时的感觉。然而，若我们也是这画中的一个元素，我们能构造出什么样的 endophysical 描述呢？局外人拥有的各种选择对局中人却是没得选择，这大概是 endophysics 的一个 intrinsic difficulty 吧。埃舍尔在努力把画廊中的画和画中的画廊结合在一起以达到消除内外分别的时候(图 7)，他肯定是遭遇到了 intrinsic difficulty 的，因此他巧妙地利用了右侧的边界以及不



图 6 夏日池塘的常见景象(图片来源来自互联网)

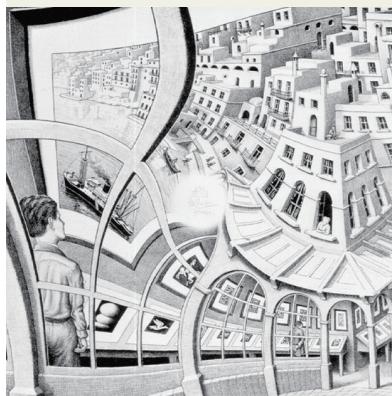


图 7 埃舍尔的作品“画展”(Print Gallery, 1956)

太巧妙地在中间加入了模糊一片。有人说，那里是奇点所在。数学的奇点？物理的奇点？

参考文献

- [1] Mach E. Principles of the theory of heat. D Reidel publishing company , 1986. p. 363
- [2] 曹则贤. 物理, 2015, 44(7):478
- [3] Cropper W H. Great physicists: the life and times of leading physicists from Galileo to Hawking. Oxford university press, 2001
- [4] Edelen D G B. Applied exterior calculus. Wiley, 1985
- [5] Massey W S. The American Mathematical Monthly, 1983, 90(10):697
- [6] Rössler O E. Endophysics. Die Welt des inneren Beobachters. Merwe Verlag, 1992
- [7] Svozil K. Extrinsic-intrinsic concept and complementarity. In: Atmanspacher H, Dalenoort G J(Eds.) Inside versus Outside. Springer-Verlag, 1994. pp.273-288
- [8] Dalenoort J(Eds.). Inside versus Outside. Springer, 1994. pp. 273-288
- [9] Tsuda I, Ikegami T. Discrete dynamics in nature and society, 2002, 7:213
- [10] Rolands P. Zero to infinity. World Scientific, 2007
- [11] 曹则贤. 现代物理知识, 2012, 24(1):36